ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΛΕΣ ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ & ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ :
ΠΑΛΑΙΟΛΟΓΟΥ ΠΑΥΛΟΣ

www.pitetragono.gr

ΓΝΩΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

1. ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τα σύνολα των αριθμών είναι τα εξής :

i. Φυσικοί αριθμοί : $\mathrm{N} = \{0,1,2,3,...\}$

ii. Ακέραιοι αριθμοί : $\mathrm{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$

iii. Ρητοί αριθμοί : $Q = \left\{\frac{\kappa}{\lambda} / \kappa, \lambda \in \mathrm{Z}\right\} \ \lambda \neq 0$

iv. Άρρητοι αριθμοί : $Q' = \{..,-\sqrt{2},...,\pi,..\sqrt{5},...\}$ (οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί)

v. Πραγματικοί αριθμοί : $R = Q \cup Q'$ (οι ρητοί και άρρητοι)

2. ΔΙΑΤΑΞΗ

- **Ορισμός της Διάταξης :** $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ και $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$
- **Κανόνες Προσήμων Διάταξης :**
  i. ($\alpha > 0$ και $\beta > 0$) $\Rightarrow \alpha + \beta > 0$
  ii. ($\alpha < 0$ και $\beta < 0$) $\Rightarrow \alpha + \beta < 0$
  iii. α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow$ $\alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$
  iv. α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow$ $\alpha\beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$
  v. $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \Re$ (το ¨=¨ ισχύει μόνο όταν α=0)
- **Ιδιότητες των Ανισοτήτων**
  i. Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$
  ii. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
  iii. Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$
  iv. Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
  v. Αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε προσθέτω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha + \gamma > \beta + \delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)
  vi. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί τότε αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε πολλαπλασιάζω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha\gamma > \beta\delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να πολλαπλασιάσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)
- **Διάταξη και Δυνάμεις**
  Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και ν φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει :
  i. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$
  ii. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$ (Προσοχή : αν α, β αρνητικοί τότε :
  $$\alpha > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^\nu > \beta^\nu, \alpha\nu_\nu_\pi\varepsilon\rho\rho\iota\tau\acute{o}\varsigma \\ \alpha^\nu < \beta^\nu, \alpha\nu_\nu_\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases})$$
- **Διαστήματα**
  i. Κλειστό διάστημα : $\alpha \leq x \leq \beta \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta]$
  ii. Ανοιχτό διάστημα : $\alpha < x < \beta \Leftrightarrow x \in (\alpha, \beta)$
  iii. Ανοιχτό δεξιά διάστημα : $\alpha \leq x < \beta \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta)$
  iv. Ανοιχτό αριστερά διάστημα : $\alpha < x \leq \beta \Leftrightarrow x \in (\alpha, \beta]$
  v. $x \leq \alpha \Leftrightarrow x \in (-\infty, \alpha]$
  vi. $x < \alpha \Leftrightarrow x \in (-\infty, \alpha)$

vii. $x \geq \alpha \Leftrightarrow x \in [\alpha, +\infty)$

viii. $x > \alpha \Leftrightarrow x \in (\alpha, +\infty)$

3. ΔΥΝΑΜΕΙΣ

- Αν α πραγματικός αριθμός και ν φυσικός τότε:

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu-\phi o \rho \varepsilon \varsigma} \ , \ \alpha^{1} = \alpha \ , \ \alpha^{0} = 1 \ (\alpha \neq 0) \ , \ \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}} \ , \ \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

- Αν ν περιττός : $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu} \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ενώ αν ν άρτιος : $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu} \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$, $\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$, $(\alpha \cdot \beta)^{\kappa} = \alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa}$, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa} = \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}$, $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$

4. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$
$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$
$$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$
$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$
$$\alpha^{\nu} - \beta^{\nu} = (\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$$
$$(x+\alpha)(x+\beta) = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$$

5. ΡΙΖΕΣ

- $\sqrt[2\nu]{x^{2\nu}} = |x|$, $x \in \Re$ και ν θετικός ακέραιος. (Συνήθως : $\sqrt{x^2} = |x|$, $\sqrt[4]{x^4} = |x|$)
- $\sqrt[\nu]{x^{\nu}} = x$, x θετικός ή 0 και ν θετικός ακέραιος. (Συνήθως : $\sqrt{x}^2 = x$, $\sqrt[3]{x}^3 = x$)
- $\sqrt[\nu]{x^{\mu}} = x^{\frac{\mu}{\nu}}$, x θετικός ή 0 και ν , μ θετικοί ακέραιοι.(Συνήθως : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$)

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ :</u> $\sqrt{x}^2 = x$ ενώ $\sqrt{x^2} = |x|$.

- Όταν κάτω από τη ρίζα υπάρχει αριθμός που είναι τέλειο τετράγωνο τότε εύκολα υπολογίζω το αποτέλεσμα. π.χ. $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{144} = 12$ κτλ. Όταν όμως ο αριθμός δεν είναι τέλειο τετράγωνο κοιτώ μήπως μπορώ να απλοποιήσω τη ρίζα γράφοντας τον αριθμό σαν γινόμενο δυο αριθμών εκ των οποίων ο ένας να είναι τέλειο τετράγωνο.

  π.χ.1 $\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$

  π.χ.2 $\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{16} = 4\sqrt{2}$

  π.χ.3 $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{25} = 5\sqrt{3}$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει μια ρίζα, τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη ρίζα αυτή ώστε να προκύψει κλάσμα που στον παρανομαστή δεν έχει ρίζα.

π.χ.1 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

π.χ.2 $\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει παράσταση της μορφής $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\alpha}\pm\beta$, $\alpha\pm\sqrt{\beta}$, τότε για να απαλλαγώ από τη ρίζα στον παρανομαστή πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρανομαστή.

π.χ.1 $\frac{2}{\sqrt{5}+2}=\frac{2(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)\cdot(\sqrt{5}-2)}=\frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}^2-2^2}=\frac{2\sqrt{5}-4}{5-4}=2\sqrt{5}-4$

π.χ.2 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{6})}{(\sqrt{5}-\sqrt{6})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{6})}=\frac{\sqrt{6}\sqrt{5}+\sqrt{6}^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{6}^2}=\frac{\sqrt{30}+6}{5-6}=-\left(\sqrt{30}+6\right)=-\sqrt{30}-6$

π.χ.3 $\frac{3}{2\sqrt{3}-3}=\frac{3\cdot(2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}-3)\cdot(2\sqrt{3}+3)}=\frac{6\sqrt{3}+9}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-9}=\frac{6\sqrt{3}+9}{12-9}=\frac{3\left(2\sqrt{3}+3\right)}{3}=2\sqrt{3}+3$

6. Η ΕΞΙΣΩΣΗ : αx+β=0

Μια εξίσωση πρώτου βαθμού έχει τελικά τη μορφή

αx+β=0 ή αx=-β (1)

- Αν α $\neq$ 0, η (1) έχει μόνο μια λύση (ρίζα), την $x=-\frac{\beta}{\alpha}$.
- Αν α=0 και β $\neq$ 0, η (1) είναι αδύνατη (δεν έχει λύση).
- Αν α=0 και β=0, η (1) είναι ταυτότητα ή αόριστη (αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x).

7. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad (\alpha\neq 0)$ Διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

- Αν Δ>0 τότε $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν Δ=0 τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα $x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν Δ<0 τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2-3x+2=0$

Είναι $\Delta=3^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1>0$, έχει δυο πραγματικές ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 1}{2}=\left\langle\begin{matrix}x_1=2\\x_2=1\end{matrix}\right.$

π.χ.2 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2+10x+25=0$

Είναι $\Delta=10^2-4\cdot 1\cdot 25=100-100=0$, έχει μια πραγματική διπλή ρίζα την $x=\frac{-10\pm\sqrt{0}}{2\cdot 1}=\frac{-10}{2}=-5$

π.χ.3 Να λύσετε την εξίσωση : $(x-3)^2+4x=-3$

$(x-3)^2+4x=-3 \Leftrightarrow x^2-6x+9+4x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+12=0$

Είναι $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 12=4-48=-44<0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

<u>Προσοχή :</u> Όταν β=0 ή γ=0, τότε η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ μπορεί να λυθεί πιο εύκολα χωρίς τη χρήση της διακρινουσας. Πιο συγκεκριμένα :

- Αν β=0 τότε $\alpha x^2+\gamma=0$

π.χ.1 $x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x=\pm 4$

π.χ.2 $x^2+5=0 \Leftrightarrow x^2=-5$ Αδύνατη.

- Αν γ=0 τότε $\alpha x^2+\beta x=0$

π.χ.1 $x^2-5x=0 \Leftrightarrow x(x-5)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ VIETA

Σε περίπτωση που η εξίσωση : $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε για το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ ισχύει :

- $S=x_1+x_2 \Leftrightarrow S=-\dfrac{\beta}{\alpha}$
- $P=x_1\cdot x_2 \Leftrightarrow P=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

Οι παραπάνω τύποι είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta. Με τη βοήθεια των τύπων του Vieta η εξίσωση : $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ μετασχηματίζεται : $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$

ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έχουν τη μορφή $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ και λύνονται με αντικατάσταση : $x^2=y$ με $y\geq 0$.

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $2x^4-7x^2-4=0$

<u>Λύση :</u> Θέτω $x^2=y$ άρα η εξίσωση γίνεται $2y^2-7y-4=0$. Είναι $\Delta=49-4\cdot 2\cdot(-4)=49+32=81>0$,

$$y_{1,2}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{81}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm 9}{4}=\begin{cases} y=4 \\ \text{ή} \\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

- Για $y=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$
- Για $y=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2=-\dfrac{1}{2}$ Αδύνατη.

8. ΔΙΩΝΥΜΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έχουν τη μορφή $x^\nu=\alpha$ $(\nu\in\mathrm{N}^*, \alpha\in\Re)$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι :

1) Αν α>0 και ν – περιττός έχει ακριβώς μια λύση $x^\nu=\alpha \Leftrightarrow x=\sqrt[\nu]{a}$
2) Αν α>0 και ν – άρτιος έχει ακριβώς δυο λύσεις $x^\nu=\alpha \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[\nu]{a}$
3) Αν α<0 και ν – περιττός έχει ακριβώς μια λύση $x^\nu=\alpha \Leftrightarrow x=-\sqrt[\nu]{-a}$
4) Αν α<0 και ν – άρτιος δεν έχει λύσεις (αδύνατη)

π.χ.1) Να λύσετε την εξίσωση : $x^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x = 3$

π.χ.2) Να λύσετε την εξίσωση : $x^4 - 256 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 256 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{256} \Leftrightarrow x = \pm 4$

π.χ.3) Να λύσετε την εξίσωση : $x^3 + 64 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -64 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x = -4$

π.χ.4) Να λύσετε την εξίσωση : $x^6 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -5$ Αδύνατη.

9. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

(Λίγα λόγια για τα πολυώνυμα)
Πολυώνυμο είναι κάθε παράσταση που μπορεί να πάρει τη μορφή:
P(x) = $\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$. με α_v , α_{v-1} , ……., α_1 , α_0 σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και χ μεταβλητή με τιμές πραγματικούς αριθμούς.

Το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα τον αριθμό ρ αν και μόνο αν P(ρ)=0 αν και μόνο αν έχει παράγοντα το x-ρ δηλαδή P(x)=(x-ρ)π(x).

Αν P(x) , Q(x) δύο πολυώνυμα με Q(x) $\neq 0$ τότε υπάρχουν δύο πολυώνυμα π(x) και υ(x) ώστε : P(x) = Q(x)π(x)+υ(x) . Τα πολυώνυμα π(x) και υ(x) βρίσκονται κάνοντας τη διαίρεση P(x) : Q(x)

Για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων χρησιμοποιούμε έναν από τους ακόλουθους τρόπους :

- Παραγοντοποίηση. Με τη βοήθεια του σχήματος **Horner** και τους κλασικούς τρόπους **παραγοντοποίησης**, προσπαθούμε να φέρουμε την εξίσωση σε μορφή $P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \ldots \cdot P_\nu(x) = 0$ οπότε $P_1(x) = 0$ ή $P_2(x) = 0$ ή …ή $P_\nu(x) = 0$ (Στο σχήμα Horner όλες οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι διαιρέτες του σταθερού όρου.)
- Αντικατάσταση μιας ποσότητας, ώστε να προκύψει πιο εύκολη εξίσωση.

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
<u>Λύση :</u> Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Παρατηρώ όμως ότι το άθροισμα των συντελεστών της εξίσωσης είναι 0, άρα η ρίζα είναι το 1.

1	-2	-5	6	1
	1	-1	-6	
1	-1	-6	0	

Άρα : $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -2$

π.χ.2 Να λύσετε την εξίσωση : $2x^3 + 15x^2 + 19x + 6 = 0$
<u>Λύση :</u> Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Όταν όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι ομόσημοι (είτε θετικοί, είτε αρνητικοί), τότε η εξίσωση δεν μπορεί να έχει θετικές ρίζες. Έτσι δοκιμάζω με όλες τις αρνητικές. Τελικά :

2	15	19	6	-1
	-2	-13	-6	
2	13	6	0	

Άρα : $2x^3 + 15x^2 + 19x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 + 13x + 6) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $2x^2 + 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$ ή $x = -\frac{1}{2}$

10. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια κλασματική εξίσωση, δηλ. εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρανομαστή,
1^{ov} παραγοντοποιώ τους παρανομαστές και βρίσκω το ΕΚΠ τους,
2^{ov} παίρνω περιορισμούς,
3^{ov} πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να γίνει απαλοιφή παρανομαστών και λύνω την εξίσωση που προκύπτει, 4^{ov} ελέγχω αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{x^2 - 1}$

Λύση : $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{8}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{8}{(x-1)(x+1)}$ $\quad$ ΕΚΠ $=(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \,\&\, x\neq -1$

$$(x-1)(x+1)\frac{x}{x-1}-(x-1)(x+1)\frac{2}{x+1}=(x-1)(x+1)\frac{8}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$$

$x(x+1)-2(x-1)=8 \Leftrightarrow x^2+x-2x+2-8=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=3$ (δεκτή) ή $x=-2$ (δεκτή).

11. ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι εξίσωσης που περιέχουν 1 τουλάχιστον ρίζα. Για να τις λύσουμε :

1ον παίρνουμε τους περιορισμούς (υπόρριζη ποσότητα ≥ 0),

2ον βάζουμε το ένα ριζικό στο 1ο μέλος και πηγαίνουμε όλους τους υπόλοιπους όρους στο 2ο,

3ον αν στο 2ο μέλος έχει άγνωστο τότε παίρνουμε περιορισμό και για το 2ο μέλος ≥ 0

4ον υψώνουμε και τα δυο μέλη σε δύναμη ίση με την τάξη του ριζικού του 1ου μέλους

5ον τέλος λύνουμε την εξίσωση και εξετάζουμε ποιες από τις λύσεις είναι δεκτές και ποιες απορρίπτονται.

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt{4-2x}=1$

Λύση : πρέπει $4-2x\geq 0 \Leftrightarrow 2x\leq 4 \Leftrightarrow x\leq 2$

$\sqrt{4-2x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{4-2x}^2=1^2 \Leftrightarrow 4-2x=1 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ δεκτή

π.χ.2 Να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt{x+3}-x=1$

Λύση : Έχω : $\sqrt{x+3}-x=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=x+1$

πρέπει $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$ (1) και $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ (2). Από (1)&(2) ισχύει $x\geq -1$.

$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow x+3=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$(δεκτή) ή $x=-2$ (απορ.)

π.χ.3 Να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1$

Λύση : Έχω : $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+6}=\sqrt{x+4}+1$

πρέπει $2x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$ (1) και $x+4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -4$ (2). Από (1)&(2) ισχύει $x\geq -3$.

$\left(\sqrt{2x+6}\right)^2=\left(\sqrt{x+4}+1\right)^2 \Leftrightarrow 2x+6=x+4+2\sqrt{x+4}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+4}=x+1$ εδώ επίσης πρέπει $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ (3). Άρα από (1), (2)&(3) ισχύει $x\geq -1$. Οπότε : $\left(2\sqrt{x+4}\right)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow 4(x+4)=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-2x-15=0 \Leftrightarrow x=5$(δεκτή) ή $x=-3$ (απορ.)

12. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 2 ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ 2 ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

- **Μέθοδος αντικατάστασης**

π.χ. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases}4x+3y=5\\2x+y=1\end{cases}$

Λύση :

ΒΗΜΑ 1 : Έχω : $\begin{cases}4x+3y=5,(1)\\2x+y=1,(2)\end{cases}$, διαλέγω τη (2) γιατί αυτή έχει τον άγνωστο y με συντελεστή 1. Άρα $2x+y=1 \Leftrightarrow y=1-2x,(1)$

ΒΗΜΑ 2 : Παίρνω την εξίσωση (1) και θα αντικαταστήσω όπου $y=1-2x$, άρα :

$4x+3y=5 \xLeftrightarrow{y=1-2x} 4x+3(1-2x)=5 \Leftrightarrow 4x+3-6x=5 \Leftrightarrow 4x-6x=5-3 \Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1$

ΒΗΜΑ 3 : $y=1-2x \xLeftrightarrow{x=-1} y=1-2(-1) \Leftrightarrow y=1+2 \Leftrightarrow y=3$

- **<u>Μέθοδος αντίθετων συντελεστών</u>**

π.χ. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 2x - 5y = -28 \end{cases}$

<u>Λύση :</u>

ΒΗΜΑ 1 : Έχω : $\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 2x - 5y = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = -3 \\ 2x - 5y = -28 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot(-3) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = -6 \\ -6x + 15y = 84 \end{cases}$

ΒΗΜΑ 2 : Προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $13y = 78 \Leftrightarrow y = 6$

ΒΗΜΑ 3 : Πάω στην εξίσωση $3x - y = -3$ και θα βάλω όπου $y = 6$, άρα έχω :

$3x - 6 = -3 \Leftrightarrow 3x = 6 - 3 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (1,6)$

π.χ.2 Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 2x^2 + 16 - 3xy = 0 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$

<u>Λύση:</u> $\begin{cases} 2x^2 + 16 - 3xy = 0 \\ x - 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 16 - 3xy = 0(1) \\ x = 2y - 4(2) \end{cases}$ η (1) λογω της (2) γίνεται :

$2(2y-4)^2 + 16 - 3(2y-4)y = 0 \Leftrightarrow 2(4y^2 - 16y + 16) + 16 - 6y^2 + 12y = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 20y + 48 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 - 10y + 24 = 0 \Leftrightarrow y = 6$ ή $y = 4$. Για $y = 6$ από (2) $x = 8$. Για $y = 4$ από (2) $x = 4$. (Μέθοδος της Αντικατάστασης)

- **<u>Μέθοδος οριζουσών</u>**

Έχουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$. Θεωρούμε τους αριθμούς

$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta$ (Ορίζουσα D του συστήματος)

$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta$ (Ορίζουσα D_x: δεν έχει x, δηλαδή αντικαθιστώ τους συντελεστές του x με τους σταθερούς όρους)

$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$ (Ορίζουσα D_y: δεν έχει y, δηλαδή αντικαθιστώ τους συντελεστές του y με τους σταθερούς όρους)

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών : βρίσκουμε τις ορίζουσες των D , D_x , D_y και μετά :

- Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) , όπου : $x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$
- Αν $D = 0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο
- Αν $D = 0$ και $D_x = 0$ και $D_y = 0$, τότε το σύστημα είναι αόριστο, έχει δηλαδή άπειρες λύσεις.

13. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Για να λύσω μια ανίσωση της μορφής : $\alpha x+\beta>0$ ή $\alpha x+\beta<0$

1ος τρόπος : Λειτουργώ όπως και στις εξισώσεις πρώτου βαθμού, δηλαδή χωρίζω γνωστούς από αγνώστους, και στη συνέχεια διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου. Αν σε κάποιο στάδιο πολλαπλασιάσω ή διαιρέσω και τα 2 μέλη με αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

2ος τρόπος : Αν θέλω να λύσω την ανίσωση με τη βοήθεια του πίνακα πρόσημου τότε λύνω την αντίστοιχη εξίσωση και στη συνέχεια βάζω τη ρίζα στο πινακάκι. Για τα πρόσημα ισχύει ότι δεξιά από το 0 είναι ομόσημο του α ενώ αριστερά ετερόσημο του α. Δηλ.

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
αx+β	ετερόσημο α	0	ομόσημο α

π.χ.1 Να λυθεί και με τους 2 τρόπους η ανίσωση : $-3x+18\geq 0$

Λύση: 1ος $-3x+18\geq 0 \Leftrightarrow -3x\geq -18 \Leftrightarrow x\leq 6$ ή $x\in(-\infty,6]$

Λύση: 2ος Έχω $-3x+18=0 \Leftrightarrow -3x=-18 \Leftrightarrow x=6$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
-3x+18	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $-3x+18\geq 0$ τότε $x\in(-\infty,6]$

14. ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής : $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ ή $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ $(\alpha\neq 0)$

Αρκεί να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και τις τιμές του x που γίνεται θετικό ή αρνητικό. Πιο συγκεκριμένα λύνω την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ βρίσκω τις ρίζες x_1, x_2 και τις τοποθετώ στο πινακάκι από το οποίο και βρίσκω το πρόσημο τις συνάρτησης στο διάστημα που θέλω.

1η περίπτωση: Δ>0

Τιμές του χ	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α

2η περίπτωση: Δ=0

Τιμές του χ	$-\infty$	x_1	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α		ομόσημο του α

3η περίπτωση: Δ<0

Τιμές του χ	$-\infty$	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α	

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $x^2-5x+6>0$

Λύση: Έχω : $x^2-5x+6=0$ $\Delta=25-24=1>0$ άρα $x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}x=2\\x=3\end{cases}$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-5x+6>0$ τότε $x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

Παρατήρηση 1 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2-5x+6\geq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

Παρατήρηση 2 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2-5x+6<0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x\in(2,3)$

Παρατήρηση 3 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2-5x+6\leq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x\in[2,3]$

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $x^2-6x+9>0$

Λύση: Έχω : $x^2-6x+9=0$ $\Delta=36-36=0$ άρα $x=3$ (Διπλή ρίζα)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
x^2-6x+9	+	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-6x+9>0$ τότε $x\in\Re-\{3\}$

(Όταν η Διακρίνουσα είναι Ο το τριώνυμο είναι ανάπτυγμα ταυτότητας δηλ. $x^2-6x+9=(x-3)^2$ οπότε μπορούμε να καταλάβουμε ακόμα καλυτέρα γιατί ισχύουν τα πρόσημα στο πινακάκι)

Παρατήρηση 1 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2-6x+9\geq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x\in\Re$

Παρατήρηση 2 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2-6x+9<0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα ότι είναι αδύνατη

Παρατήρηση 3 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2-6x+9\leq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x=3$

π.χ.3 Να λυθεί η ανίσωση : $25-x^2\geq 0$

Λύση: Έχω $25-x^2=0\Leftrightarrow x^2=25\Leftrightarrow x=\pm 5$

x	$-\infty$	-5		5	$+\infty$
$25-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $25-x^2\geq 0$ τότε $x\in[-5,5]$

15. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής $P(x)>0$ ή $P(x)<0$, όπου $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού ≥ 3, Αρκεί να αναλύσουμε το $P(x)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων ή δευτεροβάθμιων παραγόντων και να βρούμε το πρόσημο κάθε παράγοντα του.

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $x^3-3x+2<0$

Λύση: Έχω $x^3-3x+2=0$

1	0	-3	2		1
	1	1	-2		
1	1	-2	0		

Άρα : $x^3-3x+2=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x-2)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x-1$	-		-	0	+
x^2+x-2	+	0	-	0	+
Γινόμενο	-	0	+	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^3-3x+2<0$ τότε $x\in(-\infty,-2)$

16. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

➢Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ γράφεται ισοδύναμα $A(x) \cdot B(x) > 0$ ή $A(x) \cdot B(x) < 0$ [όπου $B(x) \neq 0$] και αυτό γιατί το γινόμενο και το πηλίκο δυο αριθμών έχουν το ίδιο πρόσημο.

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0$

Λύση: Πρέπει $x^2-5x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 4$

Έχω : $\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-5x+4) \leq 0$

$(x^2+3x)(x^2-5x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x^2+3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, ή, x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

ή $x^2-5x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 4$

x	$-\infty$	-3		0		1		4	$+\infty$
x^2+3x	+	0	-	0	+		+		+
x^2-5x+4	+		+		+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+		-		+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-5x+4) \leq 0$ τότε $x \in [-3,0] \cup (1,4)$. (Στο (1,4) είναι ανοιχτό λόγο του περιορισμού)

➢Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > \Gamma(x)$ γράφεται : $\frac{A(x)}{B(x)} - \Gamma(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow [A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)] \cdot B(x) > 0$ και λύνεται όπως η προηγούμενη.

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \geq \frac{8}{x^2-1}$

Λύση: Έχω : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x-1)(x+1)} \geq 0$ $\quad ΕΚΠ = (x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq -1$. (Σε αυτό το σημείο όμως δεν κάνω απαλοιφή παρανομαστών όπως στις αντίστοιχες κλασματικές εξισώσεις, αλλά **ομώνυμα κλάσματα**. Αυτό γιατί η απαλοιφή παρανομαστών δεν επιτρέπεται στις ανισώσεις καθώς η παράσταση με την οποία θα πολλαπλασιάσω κάθε όρο, δεν γνωρίζω αν είναι θετική ή αρνητική)

$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)-2(x-1)-8}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2x+2-8}{x^2-1} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{x^2-x-6}{x^2-1} \succ 0 \Leftrightarrow (x^2-x-6)(x^2-1) \geq 0$ Έχω : $(x^2-x-6)(x^2-1) = 0$

$x^2-x-6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -2$

ή $x^2-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

x	$-\infty$	-2		-1		1		3	$+\infty$
x^2-x-6	+	0	-		-		-	0	+
x^2-1	+		+	0	-	0	+		+
Γινόμενο – Πηλίκο	+	0	-		+		-	0	+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2-x-6}{x^2-1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-x-6)(x^2-1) \geq 0$ τότε $x \in (-\infty,-2] \cup (-1,1) \cup [3,+\infty)$. (Στο (-1,1) είναι ανοιχτό λόγο του περιορισμού)

17. ΑΡΡΗΤΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι ανίσωσης που περιέχουν 1 τουλάχιστον ρίζα. Για να τις λύσουμε :

- **ΜΟΡΦΗ :** $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ **ή** $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

<u>Βήμα 1</u> : παίρνουμε τους περιορισμούς (υπόρριζες ποσότητες ≥ 0),
<u>Βήμα 2</u> : βάζουμε το ένα ριζικό στο 1° μέλος και το άλλο στο 2°,
<u>Βήμα 3</u> : υψώνουμε και τα δυο μέλη σε δύναμη ίση με την τάξη του ριζικού
<u>Βήμα 4</u> : τέλος λύνουμε την ανίσωση και συναληθευουμε με τους περιορισμούς.

- ΜΟΡΦΗ : $\sqrt{f(x)} > g(x)$ ή $\sqrt{f(x)} < g(x)$

<u>Βήμα 1</u> : παίρνουμε τους περιορισμούς (υπόρριζη ποσότητες ≥ 0),
<u>Βήμα 2</u> : βάζουμε το ένα ριζικό στο 1° μέλος και πηγαίνουμε όλους τους υπόλοιπους όρους στο 2°,
<u>Βήμα 3</u> : διακρίνουμε τις περιπτώσεις : $g(x) < 0$ και $g(x) \geq 0$ και εξετάζουμε για ποιες τιμές του x ισχύουν

π.χ. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $\sqrt{8-x} > \sqrt{x-2}$ ii. $\sqrt{x-3}+5 \geq x$ iii. $\sqrt{x+4}-7 \leq x$

<u>Λύση:</u>

i. Πρέπει : $\begin{cases} 8-x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8$ ή $x \in [2,8]$ (1)

$\sqrt{8-x} > \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{8-x}\right)^2 > \left(\sqrt{x-2}\right)^2 \Leftrightarrow 8-x > x-2 \Leftrightarrow 10 > 2x \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5$ (2)

Από (1) και (2) ισχύει : $x \in [2,5)$

ii. Έχω : $\sqrt{x-3}+5 \geq x \Leftrightarrow \sqrt{x-3} \geq x-5$ (1) πρέπει : $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ (2)

Διακρίνω τις περιπτώσεις :

- $x-5 < 0 \Leftrightarrow x < 5$ (3) άρα από (2) και (3) $x \in [3,5)$
- $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ (καλύπτει τον περιορισμό (2) : $x \geq 3$). Τότε στην ανίσωση (1) και τα δυο μέλη είναι μη αρνητικά ≥ 0 άρα μπορώ να υψώσω στο τετράγωνο, έτσι έχω : $\sqrt{x-3} \geq x-5 \Leftrightarrow (\sqrt{x-3})^2 \geq (x-5)^2 \Leftrightarrow x-3 \geq x^2-10x+25 \Leftrightarrow x^2-11x+28 \leq 0$

Είναι $x^2-11x+28=0 \Leftrightarrow x=7$ ή $x=4$

x	$-\infty$	4		7	$+\infty$
$x^2-11x+28$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-11x+28 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [4,7]$. Συναληθευοντας τη λύση αυτή με τον περιορισμό $x \geq 5$ προκύπτει ότι $x \in [5,7]$

Άρα τελικά από τις παραπάνω περιπτώσεις προκύπτει ότι η ανίσωση ισχύει αν :
$x \in [3,5)$ ή $x \in [5,7]$, δηλαδή τελικά $x \in [3,7]$

iii. Έχω : $\sqrt{x+4}-7 \le x \Leftrightarrow \sqrt{x+4} \le x+7$ (1) πρέπει : $x+4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -4$ (2)

Διακρίνω τις περιπτώσεις :

- $x+7<0 \Leftrightarrow x<-7$ (3) άρα από (2) και (3) η ανίσωση (1) είναι αδύνατη
- $x+7 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -7$, τότε για $x \in [-7,-4)$ η (1) δεν ορίζεται, ενώ για $x \in [-4,+\infty)$ τα δυο μέλη της ανίσωσης (1) είναι μη αρνητικά ≥ 0 άρα μπορώ να υψώσω στο τετράγωνο, έτσι έχω : $\sqrt{x+4} \le x+7 \Leftrightarrow$ $(\sqrt{x+4})^2 \le (x+7)^2 \Leftrightarrow x+4 \le x^2+14x+49 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+13x+45 \ge 0$ $\Delta=-11$, άρα :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$x^2-13x+45$	+

άρα $x^2+13x+45 \ge 0$ ισχύει για κάθε $x \in \Re$ σε συνδυασμό με τον περιορισμό $x \ge -4$ ισχύει τελικά $x \in [-4,+\infty)$.

18. ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός : $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \alpha \ge 0 \\ -\alpha, \alpha < 0 \end{cases}$

Ιδιότητες : $|\alpha|^2 = \alpha^2$, $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\big||\alpha|-|\beta|\big| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha|+|\beta|$

ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Όταν σε μια άσκηση υπάρχουν απόλυτες τιμές και θέλω να απαλλαγώ από αυτές τότε :

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή είναι πάντα θετική, τότε φεύγει η απόλυτη τιμή και η παράσταση που είναι μέσα της γράφεται όπως είναι. Δηλ. **π.χ.1** $|x^2+3| = x^2+3$, επειδή $x^2+3>0$ για κάθε $x \in \Re$.

  π.χ.2 $|\sqrt{7}-2| = \sqrt{7}-2 =$, επειδή $\sqrt{7}-2>0$

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή είναι πάντα αρνητική, τότε η απόλυτη τιμή γίνεται παρένθεση και βγαίνει ένα μείων (-) απέξω. Δηλ.

  π.χ.1 $|-x^2-3| = -(-x^2-3) = x^2+3$, επειδή $-x^2-3<0$ για κάθε $x \in \Re$.

  π.χ.2 $|\sqrt{8}-3| = -(\sqrt{8}-3) = -\sqrt{8}+3$, επειδή $\sqrt{8}-3<0$.

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις με βάση τον ορισμό. $|\mathrm{A}(x)| = \begin{cases} \mathrm{A}(x), \alpha\nu, \mathrm{A}(x) \ge 0 \\ -\mathrm{A}(x), \alpha\nu, \mathrm{A}(x) < 0 \end{cases}$. Δηλ

  $|x+3| = \begin{cases} x+3, \alpha\nu, x+3 \ge 0 \\ -(x+3), \alpha\nu, x+3<0 \end{cases} \Leftrightarrow |x+3| = \begin{cases} x+3, \alpha\nu, x \ge -3 \\ -x-3, \alpha\nu, x<-3 \end{cases}$

  Το ίδιο μπορεί να γίνει με πινακάκι και περιπτώσεις : Μηδενίζω την παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή, βρίσκω τη ρίζα ή τις ρίζες της και κάνω πινακάκι. Από το πινακάκι διακρίνω τις αντίστοιχες περιπτώσεις και βγάζω το πρόσημο της παράστασης στο διάστημα που θέλω. Δηλ. $|x+3|$, το $x+3$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο άρα, $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x+3$	-	0	+

- Αν $x \geq -3$ ή $x \in [-3,+\infty)$ τότε $|x+3| = x+3$ (αφού $x+3 \geq 0$ για κάθε $x \in [-3,+\infty)$)
- Αν $x < -3$ ή $x \in (-\infty,-3)$ τότε $|x+3| = -(x+3) = -x-3$ (αφού $x+3 < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-3)$)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Συχνά σε εξισώσεις με απόλυτη τιμή καταλήγουμε σε μια από τις εξισώσεις :

- **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1** $|f(x)| = \alpha$ για α>0 δίνει f(x)=α ή f(x)= -α για α=0 δίνει f(x)=0 και για α<0 είναι αδύνατη.

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $|2x-1| = 3$

Λύση: $|2x-1| = 3 \Leftrightarrow 2x-1 = 3$ ή $2x-1 = -3 \Leftrightarrow 2x = 4$ ή $2x = -2 \Leftrightarrow x = 2$ ή x=-1

- **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2** $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $|2x+5| = |x|$

Λύση: $|2x+5| = |x| \Leftrightarrow 2x+5 = x$ ή $2x+5 = -x \Leftrightarrow x = -5$ ή $x = -\frac{5}{3}$

π.χ.2 Να λυθεί η εξίσωση : $|x+3| = 3|x-2|$

Λύση: $|x+3| = 3|x-2| \Leftrightarrow x+3 = 3(x-2) \Leftrightarrow x+3 = 3x-6 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

ή $x+3 = -3(x-2) \Leftrightarrow x+3 = -3x+6 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

- **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3** $|f(x)| = |g(x)| + h(x)$ Σε αυτή την περίπτωση βρίσκω τις ρίζες των $f(x) = 0$ και $g(x) = 0$, φτιάχνω πινακάκι στο οποίο βάζω τις ρίζες των παραπάνω εξισώσεων και στη συνέχεια διακρίνω περιπτώσεις για τα αντίστοιχα διαστήματα που δημιουργούνται.

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $|x+2| = 2|x-1| + 1$

Λύση: $|x+2| = 2|x-1| + 1$ (1) Έχω :

$x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $x \in (-\infty,-2)$ η (1) γίνεται : $-(x+2) = -2(x-1)+1 \Leftrightarrow -x-2 = -2x+2+1 \Leftrightarrow$
  $x = 5$ αδύνατο γιατί $x \in (-\infty,-2)$
- Αν $x \in [-2,1)$ η (1) γίνεται : $x+2 = -2(x-1)+1 \Leftrightarrow x+2 = -2x+2+1 \Leftrightarrow$
  $3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (δεκτή)
- Αν $x \in [1,+\infty)$ η (1) γίνεται : $x+2 = 2(x-1)+1 \Leftrightarrow x+2 = 2x-2+1 \Leftrightarrow x = 3$ (δεκτή)

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Για τις ανισώσεις με απόλυτη τιμή υπάρχουν οι παρακάτω σημαντικές ιδιότητες :

1) $|x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$ (α>0)
2) $|x| > \alpha \Leftrightarrow x > \alpha$ ή $x < -\alpha$ (α>0)

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $|2x-5|<6$

<u>Λύση:</u> $|2x-5|<6 \Leftrightarrow -6<2x-5<6 \Leftrightarrow -1<2x<11 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{11}{2}$ ή αλλιώς $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right)$

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $|3x+7|>2$

<u>Λύση:</u> $|3x+7|>2 \Leftrightarrow 3x+7>2 \Leftrightarrow 3x>-5 \Leftrightarrow x>-\frac{5}{3}$ (1)

ή $3x+7<-2 \Leftrightarrow 3x<-9 \Leftrightarrow x<-3$ (2)

Αν συναληθευσω της (1) και (2) $x\in(-\infty,-3)\cup\left(-\frac{5}{3},+\infty\right)$

π.χ.3 Να λυθεί η ανίσωση : $|3x+2|\geq 3|x-1|$

<u>Λύση:</u> $|3x+2|\geq 3|x-1| \Leftrightarrow |3x+2|^2\geq 9|x-1|^2 \Leftrightarrow 9x^2+12x+4\geq 9x^2-18x+9 \Leftrightarrow$

$30x\geq 5 \Leftrightarrow x\geq\frac{5}{30} \Leftrightarrow x\geq\frac{1}{6}$

π.χ.4 Να λυθεί η ανίσωση : $-3|x+2|+|x-1|<x-3$

<u>Λύση:</u> $-3|x+2|+|x-1|<x-3$ (1)

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $x\in(-\infty,-2)$ η (1) γίνεται : $3(x+2)-(x-1)<x-3 \Leftrightarrow 3x+6-x+1<x-3 \Leftrightarrow x<-10$, οπότε αν το συναληθευσουμε με το $x\in(-\infty,-2)$ παίρνουμε $x\in(-\infty,-10)$
- Αν $x\in[-2,1)$ η (1) γίνεται : $-3(x+2)-(x-1)<x-3 \Leftrightarrow -3x-6-x+1<x-3 \Leftrightarrow -5x<2 \Leftrightarrow x>-\frac{2}{5}$, οπότε αν το συναληθευσουμε με το $x\in[-2,1)$ παίρνουμε $x\in\left(-\frac{2}{5},1\right)$
- Αν $x\in[1,+\infty)$ η (1) γίνεται : $-3(x+2)+x-1<x-3 \Leftrightarrow -3x-6+x-1<x-3 \Leftrightarrow -3x<4 \Leftrightarrow x>-\frac{4}{3}$, οπότε αν το συναληθευσουμε με το $x\in[1,+\infty)$ παίρνουμε $x\in[1,+\infty)$. Άρα οι λύσεις της ανισώσεις είναι $x\in(-\infty,-10)$ ή $x\in\left(-\frac{2}{5},1\right)$ ή $x\in[1,+\infty)$ δηλ. $x\in(-\infty,-10)$ ή $x\in\left(-\frac{2}{5},+\infty\right)$

19. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Η διαδικασία κατά την οποία μια παράσταση από άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων.

- **ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ**
  1. **ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ** **π.χ.1** $2y^2-5y=y(2y-5)$,
     π.χ.2 $x(x-3)-2(3-x)=x(x-3)+2(x-3)=(x-3)(x+2)$
  2. **ΚΑΤΑ ΟΜΑΔΕΣ** **π.χ.2** $3x^3-12x^2+5x-20=3x^2(x-4)+5(x-4)=(x-4)(3x^2+5)$

- **ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**
  1. ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
  2. ΔΙΑΦΟΡΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
  3. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

  π.χ.1 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

  i) $16x^2-1=(4x)^2-1^2=(4x-1)(4x+1)$

  ii) $(3x-1)^2-81=(3x-1)^2-9^2=(3x-1-9)(3x-1+9)=(3x-10)(3x+8)$

- **ΤΡΙΩΝΥΜΟ**
  - αν Δ>0 όπου x_1,x_2 οι ρίζες, $\alpha x^2+\beta x+\gamma=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$
  - αν Δ=0 όπου x_1 η διπλή ρίζα $\alpha x^2+\beta x+\gamma=a(x-x_1)^2$
  - αν Δ<0 τότε δεν παραγοντοποιείται

  π.χ.1 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

  π.χ.2 $x^2+6x+9=(x+3)^2$

- **ΣΧΗΜΑ HORNER**

20. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι και αριθμοί

1. $ημ^2x+συν^2x=1$ ή $ημ^2x=1-συν^2x$ ή $συν^2x=1-ημ^2x$, για κάθε $x\in\Re$
2. $-1\le ημx\le 1$, $-1\le συνx\le 1$, για κάθε $x\in\Re$
3. $εφx=\dfrac{ημx}{συνx}$ για $x\in\Re$ - $\left\{\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\kappa:\text{ακέραιος}\right\}$
4. $σφx=\dfrac{συνx}{ημx}$ για $x\in\Re$ - $\{\kappa\pi,\kappa:\text{ακέραιος}\}$
5. εφx· σφx =1
6. ημ2x = 2ημx· συνx συν2x = $συν^2x-ημ^2x$ = 1- $2ημ^2x$ = $2συν^2x-1$
7. **Τύποι αποτετραγωνισμού** : $ημ^2x=\dfrac{1-συν2x}{2}$ $συν^2x=\dfrac{1+συν2x}{2}$
8. ημx = $\dfrac{2εφ\frac{x}{2}}{1+εφ^2\frac{x}{2}}$ συνx = $\dfrac{1-εφ^2\frac{x}{2}}{1+εφ^2\frac{x}{2}}$ εφx = $\dfrac{2εφ\frac{x}{2}}{1-εφ^2\frac{x}{2}}$
9. ημ(α$\pm$β)= ημασυνβ$\pm$συναημβ , συν(α$\pm$β)=συνασυνβ$\mp$ημαημβ , $εφ(\alpha\pm\beta)=\dfrac{εφα\pm εφβ}{1\mp εφαεφβ}$
10. **Νόμος ημιτόνων**: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με R την ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου ισχύει:
    $\dfrac{\alpha}{ημA}=\dfrac{\beta}{ημB}=\dfrac{\gamma}{ημΓ}=2R$

11. Νόμος συνημιτόνων: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις:
$\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot$ συνΑ , $\beta^2 = \alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\cdot$ συνΒ , $\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cdot$ συνΓ

12. Τριγωνομετρικές εξίσωσης :

$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta)$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi - \theta$

$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta$

$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta$

13. Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών

Γωνία ω	0°	$\frac{\pi}{6}$ ή 30°	$\frac{\pi}{4}$ ή 45°	$\frac{\pi}{3}$ ή 60°	$\frac{\pi}{2}$ ή 90°
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται
σφω	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Λύση :</u> $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$

π.χ.2 Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

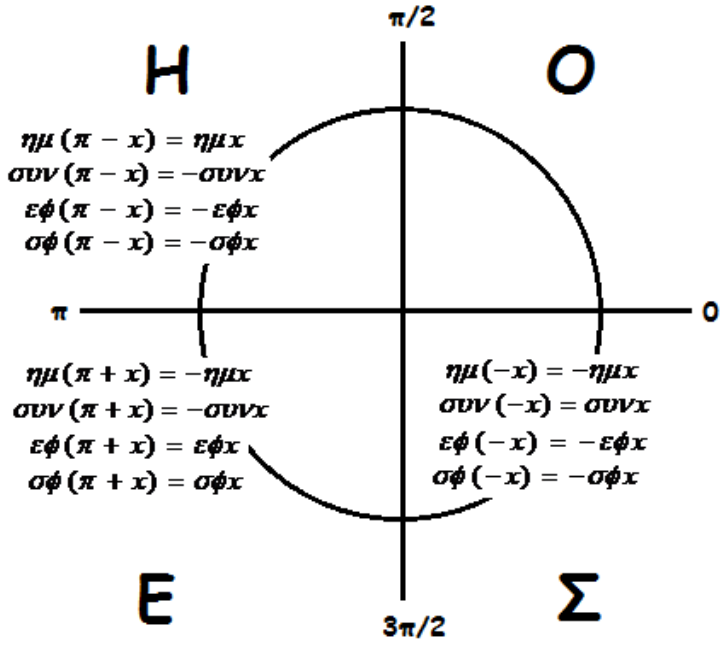
<u>Λύση :</u> $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}$

π.χ.3 Να λυθεί η εξίσωση : $\varepsilon\varphi x = 1$

<u>Λύση :</u> $\varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$

14. Αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο :

ΑΠΟ 2° ->1°	ΑΠΟ 3° ->1°	ΑΠΟ 4° ->1°
$\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$	$\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$	$\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$
$\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$
$\varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x$	$\varepsilon\varphi(\pi + x) = \varepsilon\varphi x$	$\varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x$
$\sigma\varphi(\pi - x) = -\sigma\varphi x$	$\sigma\varphi(\pi + x) = \sigma\varphi x$	$\sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x$



ΕΠΙΣΗΣ :

- $\eta\mu(2\kappa\pi + x) = \eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + x) = \sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\phi(2\kappa\pi + x) = \varepsilon\phi x$, $\sigma\phi(2\kappa\pi + x) = \sigma\phi x$
-

ημ$\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$=συνx	ημ$\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$=συνx
συν$\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$=ημx	συν$\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$=-ημx
εφ$\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$=σφx	εφ$\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$=-σφx
σφ$\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$=εφx	σφ$\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$=-εφx

π.χ.4 Να υπολογιστούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί :

i) $\eta\mu 120°$ ii) $\sigma\upsilon\nu 135°$ iii) $\varepsilon\phi 150°$ iv) $\eta\mu\frac{5\pi}{6}$ v) $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$ vi) $\varepsilon\phi\frac{3\pi}{4}$ vii) $\eta\mu\frac{5\pi}{4}$

viii) $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}$ ix) $\varepsilon\phi\frac{4\pi}{3}$ x) $\sigma\upsilon\nu\frac{21\pi}{4}$ xi) $\eta\mu\frac{21\pi}{6}$

<u>Λύση :</u>

i) $\eta\mu 120° = \eta\mu(180° - 60°) = \eta\mu 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2° -> 1°)

ii) $\sigma\upsilon\nu 135° = \sigma\upsilon\nu(180° - 45°) = -\sigma\upsilon\nu 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2° -> 1°)

iii) $\varepsilon\phi 150° = \varepsilon\phi(180° - 30°) = -\varepsilon\phi 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2° -> 1°)

iv) $\eta\mu\frac{5\pi}{6} = \eta\mu(\pi - \frac{\pi}{6}) = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (2° -> 1°)

v) $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (2° -> 1°)

vi) $\varepsilon\phi\frac{3\pi}{4}=\varepsilon\phi(\pi-\frac{\pi}{4})=-\varepsilon\phi\frac{\pi}{4}=-1$ (2° -> 1°)

vii) $\eta\mu\frac{5\pi}{4}=\eta\mu(\pi+\frac{\pi}{4})=-\eta\mu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3° -> 1°)

viii) $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}=\sigma\upsilon\nu(\pi+\frac{\pi}{6})=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3° -> 1°)

ix) $\varepsilon\phi\frac{4\pi}{3}=\varepsilon\phi(\pi+\frac{\pi}{3})=\varepsilon\phi\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ (3° -> 1°)

x) $\eta\mu\frac{27\pi}{6}=\eta\mu\left(\frac{24\pi+3\pi}{6}\right)=\eta\mu\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2}=1$

xi) $\sigma\upsilon\nu\frac{21\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{20\pi+\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(4\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (πως διώχνω το μείον) :

1. $-\eta\mu x=\eta\mu(-x)$ ή $-\eta\mu x=\eta\mu(\pi+x)$

2. $-\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu(\pi-x)$ ή $-\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu(\pi+x)$

3. $-\varepsilon\phi x=\varepsilon\phi(-x)$ ή $-\varepsilon\phi x=\varepsilon\phi(\pi-x)$

4. $-\sigma\phi x=\sigma\phi(-x)$ ή $-\sigma\phi x=\sigma\phi(\pi-x)$

π.χ.5 Να λυθούν οι εξισώσεις : i) $\eta\mu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ii) $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}$ iii) $\varepsilon\phi x=-1$

Λύση :

i) $\eta\mu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x=-\eta\mu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}$ ή

$x=2\kappa\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{4\pi}{3}$

ii) $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

iii) $\varepsilon\phi x=-1\Leftrightarrow\varepsilon\phi x=-\varepsilon\phi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\varepsilon\phi x=\varepsilon\phi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}$

ή $\varepsilon\phi x=-1\Leftrightarrow\varepsilon\phi x=-\varepsilon\phi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\varepsilon\phi x=\varepsilon\phi\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\varepsilon\phi x=\varepsilon\phi\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}$

21. ΠΡΟΟΔΟΙ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ : $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$, $S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$, $S_\nu=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]$

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει : $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ : $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}$, $S_\nu=\alpha_1\cdot\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$, Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν ισχύει : $\beta^2=\alpha\cdot\gamma$. Ο β λέγεται γεωμετρικός μέσος των α και γ

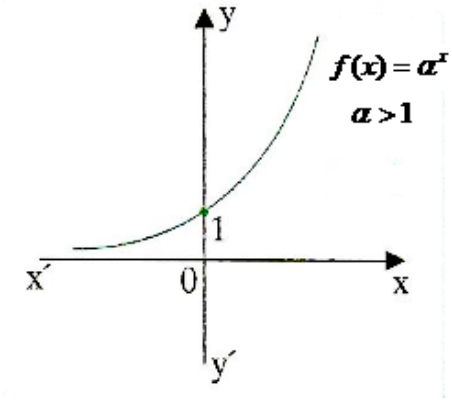
22. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ - ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ :

Η εκθετική συνάρτηση : $f(x)=\alpha^x$**, με** $\alpha>1$ **έχει τις εξής ιδιότητες :**

- ✓ Το πεδίο ορισμού της είναι το $\Re$
- ✓ Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$ (δηλ. παίρνει μόνο θετικές τιμές)
- ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, δηλ. για κάθε $x_1, x_2 \in \Re$ ισχύει :
  αν $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow \alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$
- ✓ Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0,1)$ και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιαξονα των x.
- ✓ Καθώς το x τείνει στο $+\infty$ και η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ τείνει στο $+\infty$, ενώ καθώς το x τείνει στο $-\infty$ η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ τείνει στο 0.

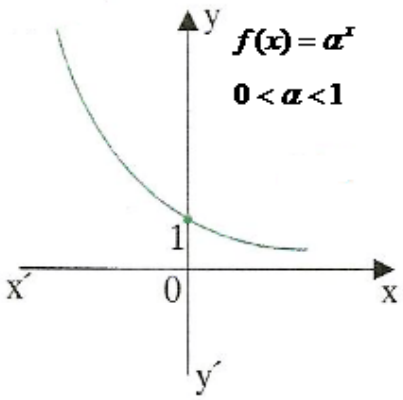
Η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha^x$, με $\alpha>1$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Η εκθετική συνάρτηση : $f(x)=\alpha^x$ **, με** $0<\alpha<1$ **έχει τις εξής ιδιότητες :**

- ✓ Το πεδίο ορισμού της είναι το $\Re$
- ✓ Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$ (δηλ. παίρνει μόνο θετικές τιμές)
- ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$, δηλ. για κάθε $x_1, x_2 \in \Re$ ισχύει :
  αν $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$
- ✓ Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0,1)$ και έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιαξονα των x.
- ✓ Καθώς το x τείνει στο $+\infty$ και η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ τείνει στο 0, ενώ καθώς το x τείνει στο $-\infty$ η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ τείνει στο $+\infty$.

Η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha^x$, με $0<\alpha<1$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : Είναι οι εξισώσεις που η μεταβλητή x βρίσκεται στον εκθέτη. Οι μορφές που μπορεί να συναντήσουμε είναι οι εξής :

- $\alpha^{f(x)} = \beta^{g(x)}$. Γράφουμε το β σε δύναμη με βάση το α (αν γίνεται) ή λογαριθμίζουμε και τα 2 μέλη.

π.χ.1 Να λυθούν οι εξισώσεις : i) $e^{x^2-5x+6} = 1$ ii) $e^x = 3$ iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$ iv) $32^x = 16^{1-x}$

Λύση :

i) $e^{x^2-5x+6} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2-5x+6} = e^0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2, ή, x = 3$

ii) $e^x = 3 \Leftrightarrow \ln e^x = \ln 3 \Leftrightarrow x \ln e = \ln 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$

iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3^4}{2^4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \Leftrightarrow x = -4$

iv) $32^x = 16^{1-x} \Leftrightarrow \left(2^5\right)^x = \left(2^4\right)^{1-x} \Leftrightarrow 2^{5x} = 2^{4-4x} \Leftrightarrow 5x = 4 - 4x \Leftrightarrow 9x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$

- $f(\alpha^x) = g(\alpha^x)$. Θέτουμε $\alpha^x = y$ >0 και καταλήγουμε σε απλή εξίσωση με άγνωστο το y.

π.χ.2 Να λυθεί η εξίσωση : $3^{2x+1} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0$

Λύση : $3^{2x+1} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} \cdot 3 - 26 \cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(3^x\right)^2 - 26 \cdot 3^x - 9 = 0$ (1)

Θέτω $3^x = y$ άρα η (1) γίνεται : $3y^2 - 26y - 9 = 0$ $\Delta = (-26)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9) = 784$

$$y_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{784}}{6} = \frac{26 \pm 28}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ ή \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

- Για $y = 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$
- Για $y = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x = -\frac{1}{3}$ Αδύνατο.

- $f(\alpha^x) = g(\beta^x)$. Δημιουργούμε τη δύναμη $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x$, οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη μορφή.

π.χ.3 Να λυθεί η εξίσωση : $21 \cdot 3^x + 5^{x+3} = 3^{x+4} + 5^{x+2}$

Λύση : $21 \cdot 3^x + 5^{x+3} = 3^{x+4} + 5^{x+2} \Leftrightarrow 21 \cdot 3^x + 5^x \cdot 5^3 = 3^x \cdot 3^4 + 5^x \cdot 5^2 \Leftrightarrow$

$21 \cdot 3^x + 125 \cdot 5^x = 81 \cdot 3^x + 25 \cdot 5^x \Leftrightarrow 125 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x = 81 \cdot 3^x - 21 \cdot 3^x \Leftrightarrow$

$100 \cdot 5^x = 60 \cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{5^x}{3^x} = \frac{60}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ : Για την επίλυση εκθετικών ανισώσεων εργαζόμαστε όπως στις εκθετικές εξισώσεις. Έτσι σε οποιαδήποτε περίπτωση καταλήγουμε στην επίλυση ανίσωσης της μορφής : $\alpha^{f(x)} > \alpha^{g(x)}$. Τότε αν :

- $\alpha > 1$ έχουμε : $\alpha^{f(x)} > \alpha^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- $0 < \alpha < 1$ έχουμε : $\alpha^{f(x)} > \alpha^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

π.χ.4 Να λυθούν οι ανισώσεις : i) $e^{2x-x^2} < 1$ ii) $2^{x^2-2x} < 8^{x-2}$ iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < 2^{4-2x}$

Λύση :

i) $e^{2x-x^2} < 1 \Leftrightarrow e^{2x-x^2} < e^0 \overset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Leftrightarrow} 2x - x^2 < 0$

Έχω $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, ή, x = 2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$2x - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $2x - x^2 < 0$ τότε $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

ii) $2^{x^2-2x} < 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} < \left(2^3\right)^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} < 2^{3x-6} \overset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Leftrightarrow} x^2 - 2x < 3x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$

Έχω $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2, ή, x = 3$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 5x + 6 < 0$ τότε $x \in (2,3)$

iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < 2^{4-2x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-(4-2x)} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} \overset{\gamma\nu.\phi\theta\iota\nu.}{\Leftrightarrow} x + 1 > 2x - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x > -5 \Leftrightarrow x < 5$

23. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ : $\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta$ π.χ. $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

- Δεκαδικός λογάριθμος λέγεται ο λογάριθμος που έχει βάση το 10: $\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$

  π.χ.1 $\log 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$, $\log 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$, $\log 0{,}1 = -1 \Leftrightarrow 10^{-1} = 0{,}1$,

  $\log 0{,}0001 = -4 \Leftrightarrow 10^{-4} = 0{,}0001$, $\log 1 = 0 \Leftrightarrow 10^0 = 1$

- Ο νεπέριος λογάριθμος **lnx , x>0** λέγεται ο λογάριθμος που έχει βάση το e.

  lnx=y $\Leftrightarrow$ **e^y=x** , με **x>0** και yεIR. (ότι έχω μέσα στο ln πρέπει να είναι πάντα θετικό >0)

  (οπου e: $\lim_{\nu \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ =2,718281828459045235360287471352 7…… = e)

Κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως λογάριθμος: x ε IR τότε: **x=lne^x**

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

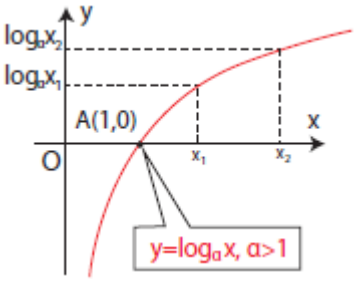
1. $\ln 1 = 0$ 2. $\ln e = 1$ 3. $\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y)$ 4. $\ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

5. $\ln x^{\kappa} = \kappa \ln x$ 6. $\ln e^x = x$ 7. $e^{\ln x} = x$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- **Η λογαριθμική συνάρτηση** $g(x)=\log_\alpha x$ **με** $\alpha>1$ **έχει τις εξής ιδιότητες :**
  - ✓ Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$
  - ✓ Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\Re$
  - ✓ Είναι γνησίως αύξουσα, που σημαίνει ότι αν $x_1<x_2$ τότε $\log_\alpha x_1<\log_\alpha x_2$

    (από το παραπάνω προκύπτει ότι : $\log_\alpha x<0,\ \alpha\nu\ 0<x<1$ και $\log_\alpha x>0,\ \alpha\nu\ x>1$)
  - ✓ Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A(1,0) και ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy΄.



ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : Για να επιλύσουμε μια λογαριθμική εξίσωση, ενεργούμε ως εξής :

1)Βάζουμε περιορισμούς (ότι είναι μέσα στο λογάριθμο >0)

2) χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες λογαρίθμων, προσπαθούμε να φτάσουμε σε εξισώσεις της μορφής $\log_a[f(x)]=\log_a[g(x)]$, όποτε f(x)=g(x)

3) τέλος ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τον αρχικό περιορισμό για την επίλυση της εξίσωσης.

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $\log(x+1)+\log(x-1)=\log 2$

<u>Λύση :</u> Πρέπει : $\begin{cases}x+1>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>1$

$$\log(x+1)+\log(x-1)=\log 2\Leftrightarrow\log[(x+1)(x-1)]=\log 2\Leftrightarrow\log(x^2-1)=\log 2\Leftrightarrow$$

$x^2-1=2\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ (δεκτή) ή $x=-\sqrt{3}$ (απορ.)

π.χ.2 Να λυθεί η εξίσωση : $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(8-x)$

<u>Λύση :</u> Πρέπει : $\begin{cases}x-2>0\\x+2>0\\8-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x>-2\\x<8\end{cases}\Leftrightarrow x\in(2,8)$

$$\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(8-x)\Leftrightarrow\ln[(x-2)(x+2)]=\ln(8-x)\Leftrightarrow\log(x^2-4)=\ln(8-x)\Leftrightarrow$$

$x^2-4=8-x\Leftrightarrow x^2+x-12=0\Leftrightarrow x=3$ (δεκτή) ή $x=-4$ (απορ.)

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ : Για την επίλυση λογαριθμικών ανισώσεων εργαζόμαστε όπως στις λογαριθμικές εξισώσεις. Έτσι σε οποιαδήποτε περίπτωση καταλήγουμε στην ανίσωση της μορφής : $\ln f(x)>\ln g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ (ή $\log f(x)>\log g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$)

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $\ln x-2\ln 2>\ln 3-\ln(x+4)$

<u>Λύση :</u> Πρέπει : $\begin{cases}x>0\\x+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x>-4\end{cases}\Leftrightarrow x>0$ (1)

$$\ln x-2\ln 2>\ln 3-\ln(x+4)\Leftrightarrow\ln x-\ln 4>\ln 3-\ln(x+4)\Leftrightarrow\ln\frac{x}{4}>\ln\frac{3}{x+4}\Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{4}>\frac{3}{x+4}\Leftrightarrow\frac{x}{4}-\frac{3}{x+4}>0\Leftrightarrow\frac{x(x+4)-12}{4(x+4)}>0\Leftrightarrow\frac{x^2+4x-12}{4(x+4)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x+4)(x^2+4x-12)>0$$

Έχω $4(x+4)(x^2+4x-12)=0 \Leftrightarrow 4(x+4)=0 \Leftrightarrow x=-4$ ή $x^2+4x-12=0 \Leftrightarrow x=2, ή, x=-6$

x	$-\infty$	-6		-4		2	$+\infty$
$4(x+4)$	-		-	0	+		+
$x^2+4x-12$	+	0	-		-	0	+
Γινόμενο – Πηλίκο	-	0	+		-		+

Άρα επειδή θέλω $4(x+4)(x^2+4x-12)>0$ τότε $x \in (-6,-4) \cup (2,+\infty)$ (2)

Όμως λογω περιορισμών αν συναληθευσω (1) και (2) τελικά $x \in (2,+\infty)$

ΓΝΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

24. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- Έστω δυο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B=(x_2, y_2)$. Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι $x_\mu = \dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y_\mu = \dfrac{y_1+y_2}{2}$.
- Έστω το διάνυσμα $\vec{AB}$ με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B=(x_2, y_2)$. Τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ είναι $\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$.
- Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$. Το μετρό του διανύσματος είναι : $\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$.
- Έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$. Ορίζουσα των διανυσμάτων ονομάζουμε τον αριθμό : $\det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2$. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, δηλαδή $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)=0$.
- Έστω διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$. Αν $x_1 \neq 0$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος ορίζεται ο αριθμός $\lambda = \dfrac{y_1}{x_1} = \varepsilon\varphi\omega$ όπου ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα x΄x.
- Αν δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα τότε ισχύει $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. (3η συνθήκη παραλληλίας)
- Τρία σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά $\Leftrightarrow \vec{AB} // \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \det\left(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}\right)=0$ ή $\lambda_{\vec{AB}} = \lambda_{\vec{A\Gamma}}$
- Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δυο μη μηδενικά διανύσματα, τότε ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}$, και $\vec{\beta}$ τον αριθμό : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \left|\vec{\alpha}\right| \cdot \left|\vec{\beta}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$ όπου φ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, και $\vec{\beta}$.
- Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου προκύπτει ότι : $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$ είναι διανύσματα του επιπέδου, τότε : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$
- Η Απόσταση δυο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ Δίνεται από τον τύπο : $(AB) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

25. ΕΥΘΕΙΑ

- **Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας :** Συμβολίζεται συνήθως με λ και προσδιορίζει την κλήση της ευθείας, τη γωνία δηλαδή που σχηματίζει με τον άξονα x΄x. Ισχύει : **λ=εφω**

- **Εξίσωση ευθείας της μορφής :** y=λx+β συντελεστή διεύθυνσης το λ
(ο συντελεστής του x) **π.χ** y = - 4x+21 λ= - 4 .
- **Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας** $(\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$, με $\mathrm{A}\neq 0$ ή $\mathrm{B}\neq 0$.

  Η ευθεία $(\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, εφόσον $\mathrm{B}\neq 0$.
- **Ευθείες παράλληλες :** $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}$
- **Ευθείες κάθετες :** $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=-1$
- **Ευθεία παράλληλη στον x΄x :** που διέρχεται από το $\mathrm{A}(x_0,y_0)$ είναι της μορφής :

  (ε) : $y=y_0$ **(οριζόντια) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=0.**
- **Ευθεία παράλληλη στον y΄y :** που διέρχεται από το $\mathrm{A}(x_0,y_0)$ είναι της μορφής :

  (ε) : $x=x_0$ **(κατακόρυφη) και ο συντελεστής διεύθυνσης λ δεν ορίζεται (γιατί** $\lambda=\varepsilon\phi\omega \Leftrightarrow \lambda=\varepsilon\phi 90^\circ \Leftrightarrow \lambda=\delta.o.$**)**
- **Ευθεία** που διέρχεται από το $\mathrm{A}(x_0,y_0)$ έχει εξίσωση : (ε) : $y-y_0=\lambda(x-x_0)$
- **Ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) :** $(\varepsilon): y=\lambda x$, ειδική περίπτωση η διχοτόμος του 1^{ου} και του 3^{ου} τεταρτημορίου (ε) : $y=x$
- Για να βρω σημείο τομής μιας ευθείας με τον x΄x βάζω y=0 στην εξίσωση της, βρίσκω το x οπότε το σημείο θα είναι της μορφής Α(x,0)
- Για να βρω σημείο τομής μιας ευθείας με τον y΄y βάζω x=0 στην εξίσωση της, βρίσκω το y οπότε το σημείο θα είναι της μορφής Β(0,y)
- **Η απόσταση** ενός σημείου $\mathrm{M}(x_0,y_0)$ από την ευθεία $(\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ είναι: $d(\mathrm{M},\varepsilon)=\frac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$

  π.χ Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $\mathrm{M}(-1,2)$ από την Ευθεία (ε) : 4x+3y+8=0.

  $$d(\mathrm{M},\varepsilon)=\frac{|4\cdot(-1)+3\cdot 2+8|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-4+6+8|}{5}=\frac{10}{5}=2$$
- **Το εμβαδόν** του τριγώνου ΑΒΓ με $\mathrm{A}(x_1,y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$ είναι: $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right|$ με

  $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(x_3-x_1,y_3-y_1)$

26. ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

- **<u>ΚΥΚΛΟΣ</u>**

Κύκλος είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου Οxy τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση ρ, (ακτίνα του κύκλου), από ένα σταθερό σημείο Κ , (κέντρο του κύκλου).
Ένας κύκλος ορίζεται αν γνωρίζουμε το κέντρο του (x_0, y_0) και την ακτίνα του ρ.

- Αν ο κύκλος έχει εξίσωση: $x^2+y^2=\rho^2$ τότε έχει κέντρο: Κ(0,0) και ακτίνα ρ και αντίστροφα.
- Αν ο κύκλος έχει εξίσωση: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ τότε έχει κέντρο: Κ(x_0, y_0) και ακτίνα ρ και αντίστροφα.
- Αν όμως έχει τη γενική μορφή: $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, τότε έχει κέντρο: $K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$ και ακτίνα

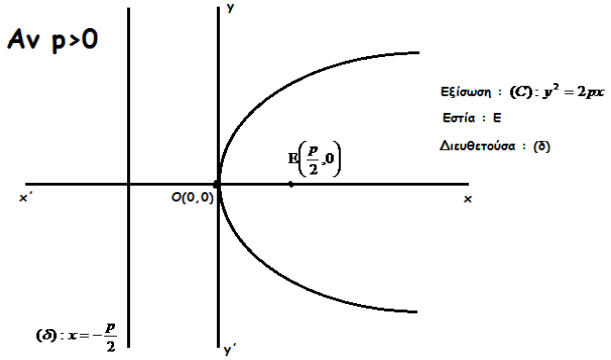
  $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$.

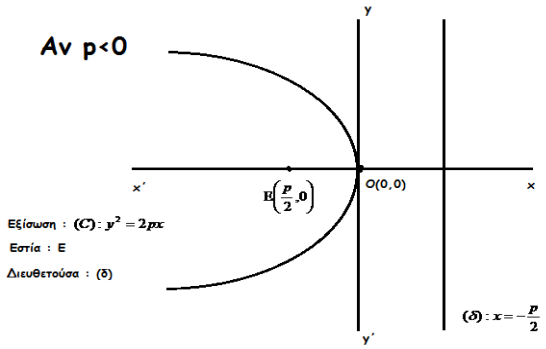
➢ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Παραβολή είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου Οxy τα οποία **ισαπέχουν** από μια **ευθεία (δ)** , (διευθετούσα) και ένα σταθερό **σημείο Ε** , (Εστία).

- Αν M(x ,y) αυτά τα σημεία και Διευθετούσα $(\delta): x = -\frac{p}{2}$ και Εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ τότε:

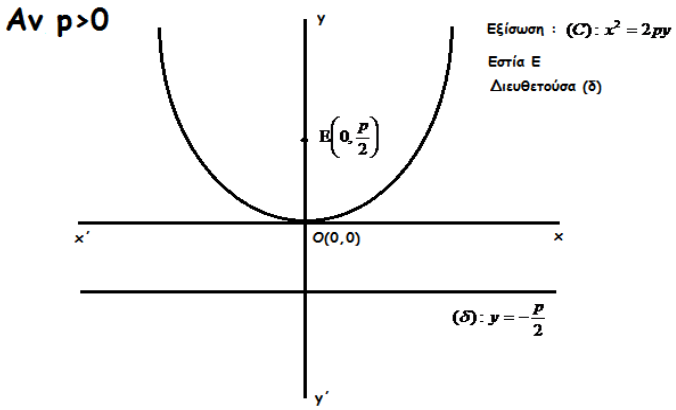
  d(M , δ) = (ME) $\Leftrightarrow (C): y^2 = 2px$.

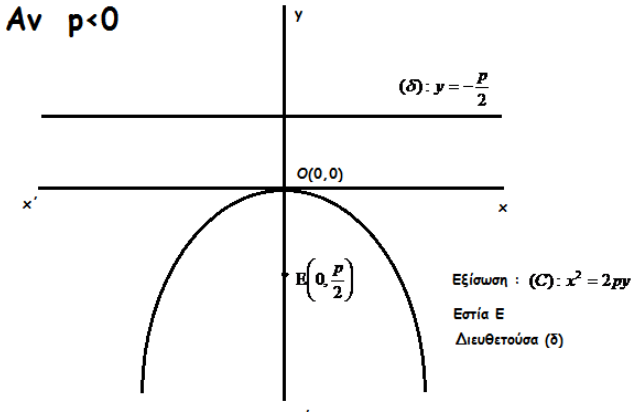




- Αν M(x ,y) αυτά τα σημεία και Διευθετούσα $(\delta): y = -\frac{p}{2}$ και Εστία $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$ τότε:

  d(M,δ) = ME $\Leftrightarrow (C): x^2 = 2py$.



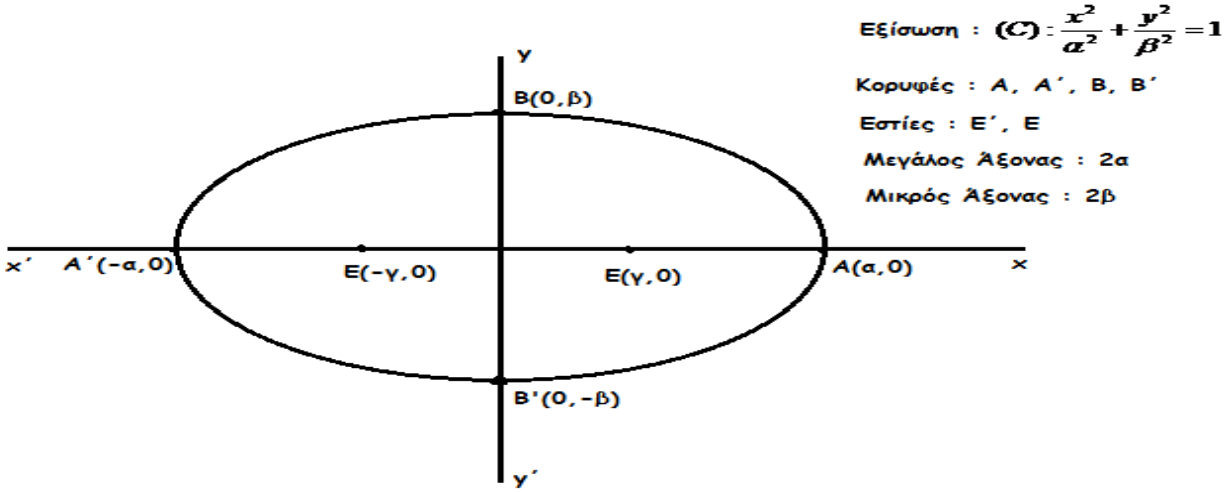


➢ ΕΛΛΕΙΨΗ

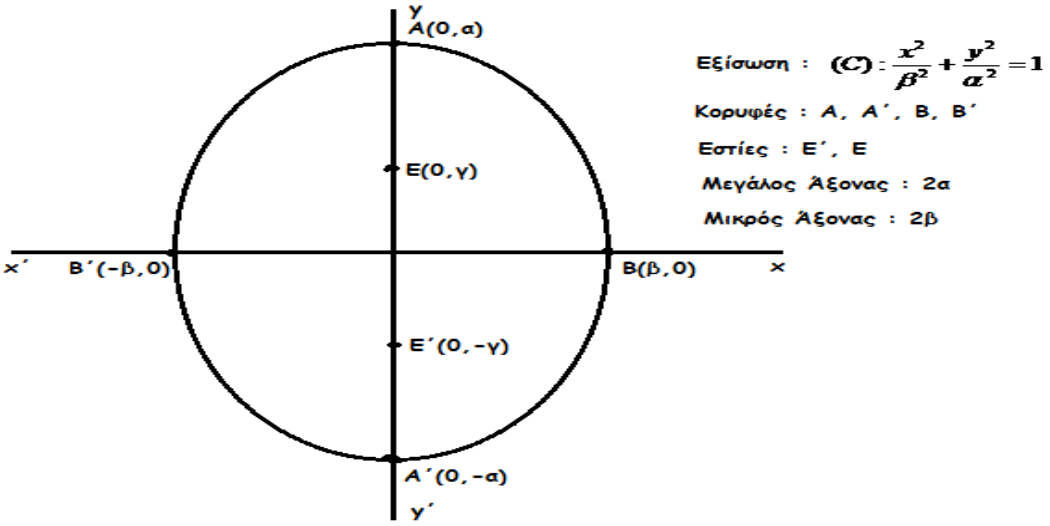
Έλλειψη είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου Οxy τα οποία έχουν **σταθερό άθροισμα αποστάσεων , (2α)** , από δύο **σταθερά σημεία** Ε , Ε΄ (εστίες)

(Πρέπει: ΕΕ΄= 2γ<2α).

- Αν M(x,y) αυτά τα σημεία και Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0) τότε: $(ME)+(ME') = 2\alpha \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,$ $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.



- Αν M(x,y) αυτά τα σημεία και Ε(0,γ), Ε΄(0,-γ) τότε: $(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME}')=2\alpha \Leftrightarrow \frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1,$ $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.



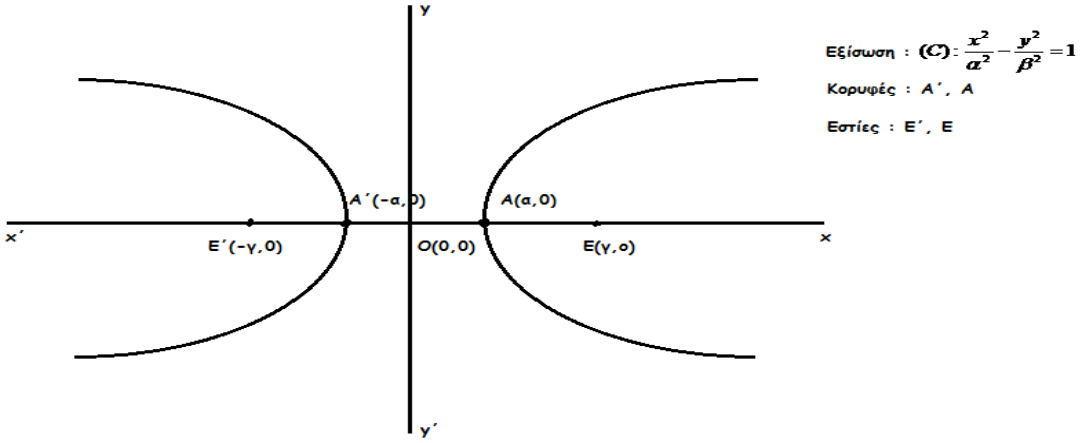
- Εκκεντρότητα της έλλειψης ονομάζεται ο αριθμός ε= $\frac{\gamma}{\alpha}$

➢ **<u>ΥΠΕΡΒΟΛΗ</u>**

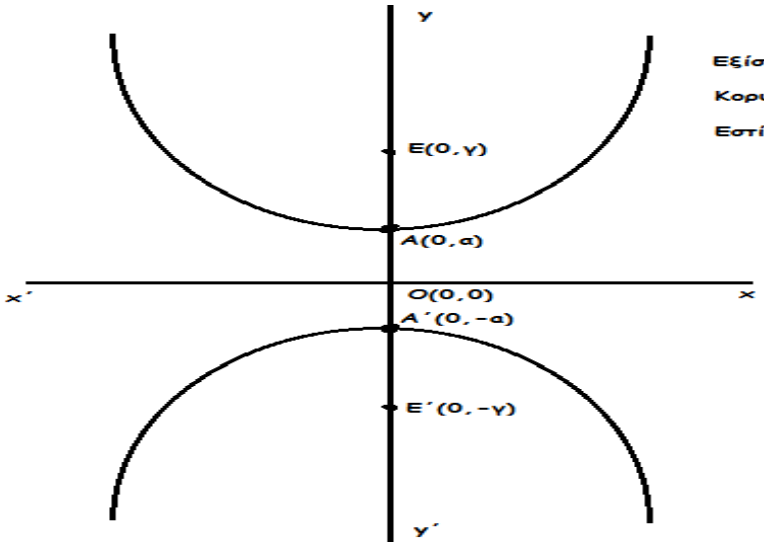
Υπερβολή είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου Οχψ τα οποία έχουν **σταθερή απόλυτη διαφορά αποστάσεων , (2α)** , από δύο **σταθερά σημεία** Ε , Ε΄ (εστίες),

(Πρέπει: ΕΕ΄= 2γ>2α)

- Αν M(x,y) αυτά τα σημεία και Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0) τότε: $\left|(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')\right|=2\alpha \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1,$ $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$.



- Αν Μ(x,y) αυτά τα σημεία και Ε(0,γ), Ε΄(0,-γ) τότε: $\left|(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')\right| = 2\alpha \Leftrightarrow \frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$, $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$.



Εξίσωση : $(C): \frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$

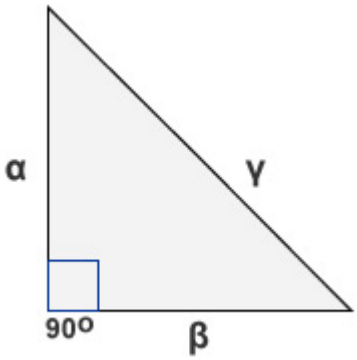
Κορυφές : Α΄, Α

Εστίες : Ε΄, Ε

- Εκκεντρότητα της υπερβολής ονομάζεται ο αριθμός ε= $\frac{\gamma}{\alpha}$,
- Ασύμπτωτες τις υπερβολής $(C): \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $(\varepsilon_2): y=-\frac{\beta}{\alpha}x$, ενώ της $(C): \frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=\frac{\alpha}{\beta}x$ και $(\varepsilon_2): y=-\frac{\alpha}{\beta}x$.
- Αν α=β, τότε η υπερβολή λέγεται ισοσκελής υπερβολή και έχει εξίσωση της μορφής : $(C): x^2-y^2=\alpha^2$

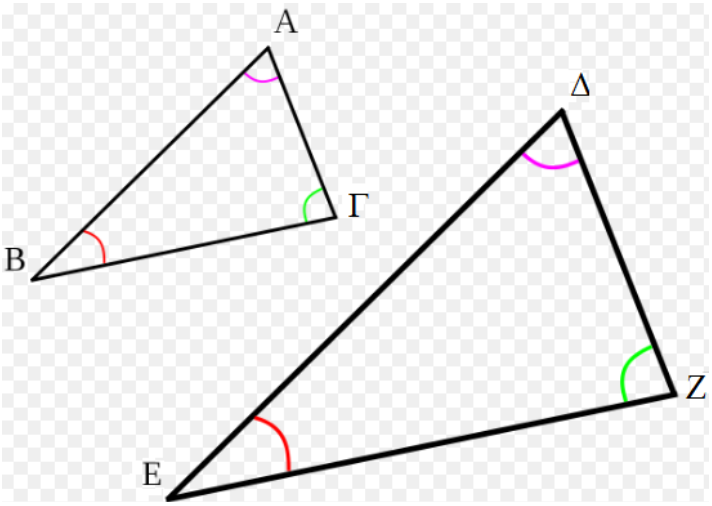
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

- **ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ**



$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2}$$

- **ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ**



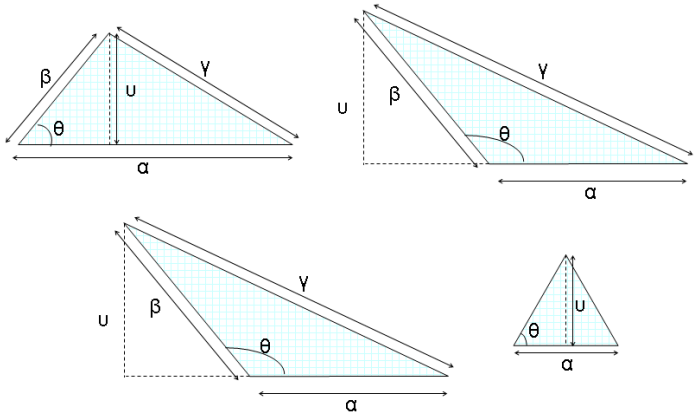
- Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μια προς μια, τότε είναι όμοια.
- Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ανάλογες μια προς μια και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.
- Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μια προς μια, τότε είναι όμοια.

Αν δύο τρίγωνα $\text{ΑΒΓ} \approx \Delta\text{ΕΖ}$ είναι όμοια τότε ισχύει : $\boxed{\frac{\text{ΑΒ}}{\Delta\text{Ε}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\Delta\text{Ζ}} = \lambda}$

Όπου λ, ο λόγος ομοιότητας. Ο λόγος ομοιότητας λ δυο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δυο ομόλογων υψών, διχοτόμων και διαμέσων τους.

▪ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

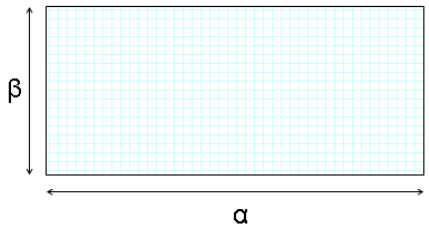
➢ ΤΡΙΓΩΝΟ



Περίμετρος : $\Pi = \alpha + \beta + \gamma$

Εμβαδόν : $E = \dfrac{\alpha \cdot \upsilon}{2}$

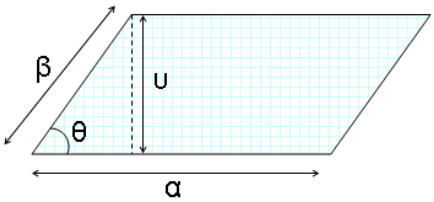
➢ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ



Περίμετρος : $\Pi = 2\alpha + 2\beta$

Εμβαδόν : $E = \alpha \cdot \beta$

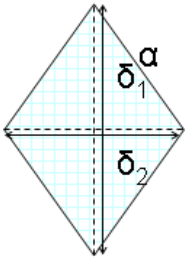
➢ ΠΛΑΓΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ



Περίμετρος : $\Pi = 2\alpha + 2\beta$

Εμβαδόν : $E = \alpha \cdot \upsilon = \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu\theta$

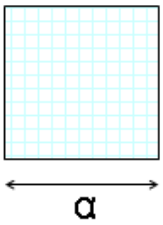
➢ ΡΟΜΒΟΣ



Περίμετρος : $\Pi = 4\alpha$

Εμβαδόν : $E = \dfrac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$

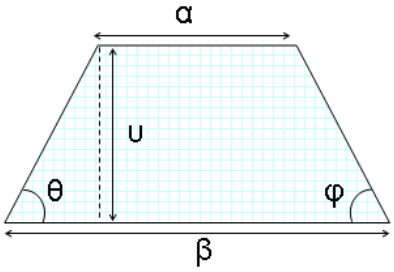
- **ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ**



Περίμετρος : $\Pi = 4\alpha$

Εμβαδόν : $E = \alpha^2$

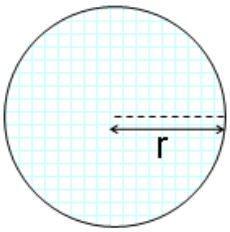
- **ΤΡΑΠΕΖΙΟ**



Περίμετρος : $\Pi = \alpha + \beta + \left(\frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\eta\mu\phi} \right) \cdot \upsilon$

Εμβαδόν : $E = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \upsilon$

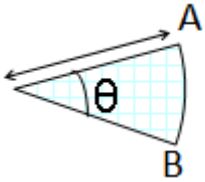
- **ΚΥΚΛΟΣ (με ακτίνα r)**



Περίμετρος : $\Pi = 2\pi r$

Εμβαδόν : $E = \pi r^2$

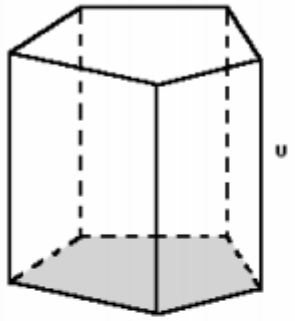
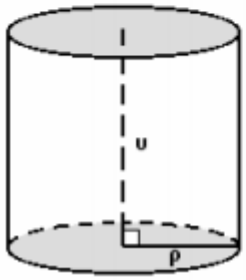
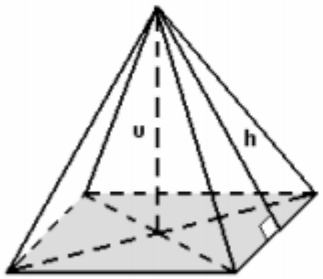
- **ΜΗΚΟΣ – ΕΜΒΑΔΟ ΤΟΞΟΥ (τομέας κύκλου ακτίνας r και τόξου θ σε rad)**

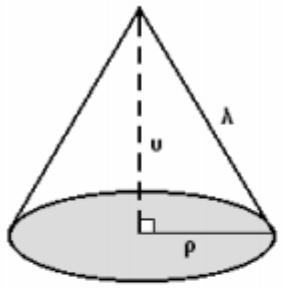
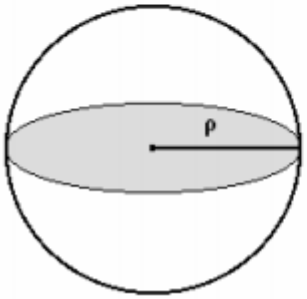


Περίμετρος : $\Pi = r\theta$

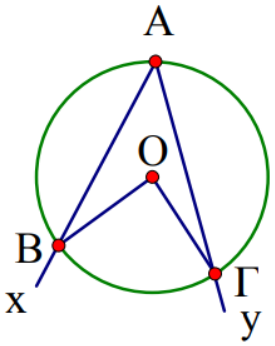
Εμβαδόν : $E = \frac{1}{2} r^2 \theta$

- **ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ**

	Ε Μ Β Α Δ Ο Ν	Ο Γ Κ Ο Σ
ΟΡΘΑ ΠΡΙΣΜΑΤΑ  	**Εμβαδόν Παράπλευρης Επιφάνειας** $E = \Pi_\beta \cdot \upsilon$ Π_β = Περίμετρος βάσης υ = ύψος πρίσματος **Ολικό Εμβαδόν** $E_{ολ} = \Pi_\beta \cdot \upsilon + 2 \cdot E_\beta$	$V = E_\beta \cdot \upsilon$ E_β = Εμβαδόν βάσης υ = ύψος πρίσματος
ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ  	**Εμβαδόν Κυρτής Επιφάνειας** $E = 2\pi\rho \cdot \upsilon$ ρ = ακτίνα βάσης υ = ύψος κυλίνδρου **Ολικό Εμβαδόν** $E_{ολ} = 2\pi\rho \cdot \upsilon + 2 \cdot \pi\rho^2$	$V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon$ ρ = ακτίνα βάσης υ = ύψος κυλίνδρου
ΠΥΡΑΜΙΔΑ  	**Εμβαδόν Παράπλευρης Επιφάνειας Κανονικής Πυραμίδας** $E = \frac{1}{2} \Pi_\beta \cdot h$ Π_β = Περίμετρος βάσης h = ύψος παράπλευρης έδρας **Ολικό Εμβαδόν** $E_{ολ} = \frac{1}{2} \Pi_\beta \cdot h + E_\beta$	$V = \frac{1}{3} E_\beta \cdot \upsilon$ E_β = Εμβαδόν βάσης υ = ύψος πυραμίδας

ΚΩΝΟΣ	**Εμβαδόν Κυρτής Επιφάνειας** $E = \pi\rho\cdot\lambda$ ρ = ακτίνα βάσης λ = μήκος γενέτειρας **Ολικό Εμβαδόν** $E_{ολ} = \pi\rho\cdot\lambda + \pi\rho^2$	$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2\cdot\upsilon$ ρ = ακτίνα βάσης υ = ύψος κώνου
		
ΣΦΑΙΡΑ	$E = 4\pi\rho^2$ ρ = ακτίνα σφαίρας	$V = \frac{4}{3}\pi\rho^3$ ρ = ακτίνα σφαίρας
		

- **ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΕΝΤΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ**



- Το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι ίσο με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας $\overset{\frown}{B\Gamma} = B\hat{O}\Gamma$.
- Η εγγεγραμμένη είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης : $B\hat{A}\Gamma = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2}$.

  Αντίστοιχα το μέτρο της εγγεγραμμένης είναι ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.
- Κάθε γωνία εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες, που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα, είναι ίσες.