

2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**31. ΟΡΙΣΜΟΙ**

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται :

α) Παραγωγίσιμη στο σύνολο A

β) Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

γ) Παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ (2010 Β', 2013, 2020, 2023)

δ) Τι ονομάζουμε πρώτη, δεύτερη και γενικά νιοστή παράγωγο μιας συνάρτησης f ;
(2020 Π.Σ. μόνο για την πρώτη παράγωγο)

Απάντηση :

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Θα λέμε ότι:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

β) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

γ) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει: $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$.

δ) Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f' : A_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f'(x), \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f** . Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται “ντε εφ προς ντε χι”. Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$.

Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f' , αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f'' .

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της f** , με $n \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(n)}$. Δηλαδή

$$f^{(n)} = [f^{(n-1)}]', \quad n \geq 3.$$

Η εύρεση της παραγώγου συνάρτησης, με βάση τον ορισμό που δώσαμε, δεν είναι πάντα εύκολη. Στη συνέχεια θα δούμε μερικές βασικές περιπτώσεις παραγωγίσιμης συναρτήσεων, που θα τις χρησιμοποιούμε στην εύρεση παραγώγου συναρτήσεων (αντί να χρησιμοποιούμε τον ορισμό κάθε φορά).

Παρατήρηση :

$$\text{Ισχύει : } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ και } f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$\text{Επίσης : } f'(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \text{ και } f''(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f'(u) - f'(x)}{u - x} \quad [x+h=u]$$

32. Να αποδείξετε ότι :

α) Αν $f(x) = c$, τότε $f'(x) = 0$

β) Αν $f(x) = x$, τότε $f'(x) = 1$

γ) Αν $f(x) = x^v$, με $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, τότε $f'(x) = vx^{v-1}$

δ) Αν $f(x) = \sqrt{x}$, τότε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

(2005 Β')

Απόδειξη :

α) Για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$.

β) Για $x \neq x_0$ ισχύει ότι: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

γ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1},$$

Επομένως: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1}$, δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$.

δ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}, \text{ οπότε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \text{ δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Παρατήρηση : η $f(x) = \sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$, όμως: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty, \text{ άρα η } f \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0.$$

Σχόλια – Τύποι :

• Έστω συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x) = \sigma \nu \eta x, \text{ δηλαδή } (\eta \mu x)' = \sigma \nu \eta x$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma \nu \eta x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x) = -\eta \mu x, \text{ δηλαδή } (\sigma \nu \eta x)' = -\eta \mu x$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x) = e^x, \text{ δηλαδή } (e^x)' = e^x$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \text{ δηλαδή } (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

33. ΘΕΩΡΗΜΑ (Παράγωγος αθροίσματος)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (2020, 2023)

Απόδειξη :

Για $x \neq x_0$, ισχύει: $\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$.

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0), \text{ δηλαδή}$$

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Σημείωση :

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2, \dots, f_k$, είναι παραγωγίσιμες στο Δ , τότε :

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_k'(x).$$

Για παράδειγμα, $(\eta\mu x + x^2 + e^x + 3)' = (\eta\mu x)' + (x^2)' + (e^x)' + (3)' = \sigma\upsilon\nu x + 2x + e^x$.

34. ΘΕΩΡΗΜΑ (Παράγωγος γινομένου)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Σημείωση :

• Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Για παράδειγμα, $(e^x \ln x)' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}$, $x > 0$.

• Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$\begin{aligned} (f(x)g(x)h(x))' &= [(f(x)g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x)g(x))' \cdot h(x) + (f(x)g(x)) \cdot h'(x) \\ &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x). \end{aligned}$$

Για παράδειγμα: $(\sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot \ln x)' = (\sqrt{x})' \cdot \eta\mu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot (\eta\mu x)' \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot (\ln x)'$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \eta\mu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, επειδή $(c)' = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε: $(cf(x))' = cf'(x)$

Για παράδειγμα: $(6x^3)' = 6(x^3)' = 6 \cdot 3x^2 = 18x^2$.

35. ΘΕΩΡΗΜΑ (Παράγωγος πηλίκου)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Σημείωση :

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει

$$g(x) \neq 0, \text{ τότε για κάθε } x \in \Delta \text{ έχουμε: } \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -vx^{-v-1}$, δηλαδή $(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v}\right)' = \frac{(1)'x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}.$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Απόδειξη:

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ έχουμε:

$$(\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x | \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

36. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Σχόλια :

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$. Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$

και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας**.

37. ΘΕΩΡΗΜΑ

Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$,

β) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

(2008)

Απόδειξη :

α) Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

β) Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha.$$

γ) Πράγματι:

$$\text{— αν } x > 0, \text{ τότε } (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \text{ ενώ}$$

$$\text{— αν } x < 0, \text{ τότε } \ln|x| = \ln(-x), \text{ οπότε, αν θέσουμε } y = \ln(-x) \text{ και } u = -x, \text{ έχουμε } y = \ln u.$$

$$\text{Επομένως, } y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} \text{ και άρα } (\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

Α. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)$	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ $f'(x)$
$f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R},$	$f'(x) = (c)' = 0,$
$f(x) = x,$	$f'(x) = (x)' = 1,$
$f(x) = x^\nu,$	$f'(x) = (x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu-1},$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \eta\mu x$	$f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$f'(x) = (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
$f(x) = \varepsilon\phi x$	$f'(x) = (\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
$f(x) = \sigma\phi x$	$f'(x) = (\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = (e^x)' = e^x$
$f(x) = \alpha^x$	$f'(x) = (\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ln \alpha$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Επίσης ισχύουν οι εξής κανόνες παραγώγισης :

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(cf(x))' = cf'(x), \quad c \in \mathbb{R}$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

- i. $f(x) = 4x + 5$
- ii. $f(x) = x^2 + 5x + 2013$
- iii. $f(x) = 7x^3 + 5x^2 - 3x + 1$
- iv. $f(x) = 3e^x + 9$
- v. $f(x) = 2\ln x + 5x + \frac{1}{x}$
- vi. $f(x) = 3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x$
- vii. $f(x) = 2\sqrt{x} + 3\ln x$
- viii. $f(x) = \sqrt[3]{x}, x > 0$

Λύση :

- i. $f'(x) = (4x + 5)' = (4x)' + (5)' = 4(x)' + 0 = 4 \cdot 1 = 4$
- ii. $f'(x) = (x^2 + 5x + 2013)' = (x^2)' + (5x)' + (2013)' = 2x + 5$
- iii. $f'(x) = (7x^3 + 5x^2 - 3x + 1)' = (7x^3)' + (5x^2)' - (3x)' + (1)' = 3 \cdot 7x^2 + 2 \cdot 5x - 3 = 21x^2 + 10x - 3$
- iv. $f'(x) = (3e^x + 9)' = (3e^x)' + (9)' = 3(e^x)' = 3e^x$
- v. $f'(x) = (2\ln x + 5x + \frac{1}{x})' = (2\ln x)' + (5x)' + (\frac{1}{x})' = 2(\ln x)' + 5 - \frac{1}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{x} + 5 - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} + 5 - \frac{1}{x^2}$
- vi. $f'(x) = (3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x)' = (3\eta\mu x)' - (2\sigma\upsilon\nu x)' = 3(\eta\mu x)' - 2(\sigma\upsilon\nu x)' = 3\sigma\upsilon\nu x - 2 \cdot (-\eta\mu x) = 3\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x$
- vii. $f'(x) = (2\sqrt{x} + 3\ln x)' = (2\sqrt{x})' + (3\ln x)' = 2(\sqrt{x})' + 3(\ln x)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}$
- viii. Είναι $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad (\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}, x > 0)$
Άρα : $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

2) Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

- i. $f(x) = 2x^3 \cdot \ln x$
- ii. $f(x) = (3x^2 + 5x)(2x + 7)$
- iii. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot \ln x$
- iv. $f(x) = 4x^2\eta\mu x - 3x^2\sigma\upsilon\nu x$
- v. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$
- vi. $f(x) = \frac{x^2 + 10}{x + 11}$
- vii. $f(x) = \frac{x + \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

viii. $f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$

Λύση:

- i. $f'(x) = (2x^3 \cdot \ln x)' = (2x^3)' \cdot \ln x + 2x^3 \cdot (\ln x)' = 6x^2 \cdot \ln x + 2x^3 \cdot \frac{1}{x} = 6x^2 \cdot \ln x + 2x^2$
- ii. $f'(x) = (3x^2 + 5x)'(2x + 7) + (3x^2 + 5x)(2x + 7)' = (6x + 5)(2x + 7) + (3x^2 + 5x) \cdot 2 = 12x^2 + 42x + 10x + 35 + 6x^2 + 10x = 18x^2 + 62x + 35$
- iii. $f'(x) = (\sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot \ln x)' = (\sqrt{x})' \cdot \eta\mu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot (\eta\mu x)' \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot (\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \eta\mu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot \frac{1}{x}, \quad x > 0.$
- iv. $f'(x) = (4x^2 \eta\mu x - 3x^2 \sigma\upsilon\nu x)' = (4x^2 \eta\mu x)' - (3x^2 \sigma\upsilon\nu x)' = (4x^2)' \cdot \eta\mu x + 4x^2 \cdot (\eta\mu x)' - [(3x^2)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3x^2 \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'] = 8x \cdot \eta\mu x + 4x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - [6x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3x^2 \cdot (-\eta\mu x)] = 8x \cdot \eta\mu x + 4x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - (6x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 3x^2 \cdot \eta\mu x) = 8x \cdot \eta\mu x + 4x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - 6x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3x^2 \cdot \eta\mu x =$
- v. $f'(x) = \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} \right)' = \frac{(x^2 + 2x - 1)' \cdot x - (x^2 + 2x - 1) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{(2x + 2)x - x^2 - 2x + 1}{x^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 2x + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$
- vi. $f'(x) = \left(\frac{x^2 + 10}{x + 11} \right)' = \frac{(x^2 + 10)' \cdot (x + 11) - (x^2 + 10) \cdot (x + 11)'}{(x + 11)^2} = \frac{2x(x + 11) - (x^2 + 10)}{(x + 11)^2} = \frac{2x^2 + 22x - x^2 - 10}{(x + 11)^2} = \frac{x^2 + 22x - 10}{x^2 + 22x + 121}$
- vii. $f'(x) = \left(\frac{x + \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(x + \eta\mu x)' \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x) - (x + \eta\mu x) \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x)'}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{(1 + \sigma\upsilon\nu x) \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x) - (x + \eta\mu x) \cdot (-\eta\mu x)}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2 + (x + \eta\mu x) \cdot \eta\mu x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2}$
- viii. $f'(x) = \left(\frac{x \ln x}{x - 1} \right)' = \frac{(x \ln x)'(x - 1) - x \ln x(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{(\ln x + 1)(x - 1) - x \ln x}{(x - 1)^2} = \frac{x \ln x - \ln x + x - 1 - x \ln x}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1 - \ln x}{(x - 1)^2}.$

3) Να βρείτε την παράγωγο της παρακάτω συνάρτησης : $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 2 \\ x^3 - 2x^2 - x + 4, & x > 2 \end{cases}$

Λύση:

- Για $x < 2$ έχω $f(x) = x^2 - x$ άρα $f'(x) = 2x - 1$
- Για $x > 2$ έχω $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 4$ άρα $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$
- Στο $x_0 = 2$ θα πρέπει να εξετάσω με τον ορισμό αν είναι παραγωγίσιμη :
Πρώτα θα εξετάσω αν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$:

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$f(2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 - 2x^2 - x + 4) = 2 \text{ άρα η } f(x) \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 2. \text{ Θα εξετάσω}$$

τώρα αν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 4 - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x^2 - 1)}{x - 2} = 3 \text{ άρα η } f(x) \text{ είναι}$$

$$\text{παραγωγίσιμη στο } x_0 = 2 \text{ με } f'(2) = 3 \text{ άρα : } f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x < 2 \\ 3 & , x = 2 \\ 3x^2 - 4x - 1 & , x > 2 \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x \leq 2 \\ 3x^2 - 4x - 1 & , x > 2 \end{cases}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

i. $f(x) = 3x + 2$

ii. $f(x) = x^2 - 3x + 50$ στο $x_0 = -1$

iii. $f(x) = 5x^3 + 7x^2 - 2x + 100$

iv. $f(x) = e^x + 4$

v. $f(x) = 6 \ln x + x$ $x_0 = 6$

vi. $f(x) = 2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x$

vii. $f(x) = 5\varepsilon\phi x$

viii. $f(x) = \sqrt{x} + 2 \ln x$ $x_0 = 4$

5) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

i. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

ii. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

iii. $f(x) = (x^2 - 2x)(2x + 1)$

iv. $f(x) = (3x - x^2)(2x^3 + x)$

v. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$

vi. $f(x) = \eta\mu x \cdot e^x$

vii. $f(x) = x \cdot \eta\mu x$

viii. $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu x \cdot e^x$

ix. $f(x) = x \cdot e^x \cdot \ln x - e^x$

x. $f(t) = x^2 \cdot \ln x + t^2 e^x - \sqrt{t} \cdot \eta\mu t$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

6) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

$$\begin{array}{lll} \text{i. } f(x) = \frac{3x+2}{2x-3} & \text{ii. } f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} & \text{iii. } f(x) = \frac{x^2+10}{x-1} \\ \text{iv. } f(x) = \frac{\ln x}{x} & \text{v. } f(x) = \frac{x^2 \cdot \eta\mu x}{x-1} & \text{vi. } f(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2x+1} \end{array}$$

7) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = e^x \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$.

8) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων :

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ii. } f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x - x^2, & x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής. Στη συνέχεια να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ και να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x \cdot \eta\mu x - (x^2 - 2)\sigma\upsilon\nu x$. Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^3} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x^3}$$

11) Αν μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$, να αποδείξετε ότι :

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(x) - \alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = f(\alpha) + \alpha f'(\alpha) & \\ \text{ii. } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{e^x f(x) - e^\alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = e^\alpha (f(\alpha) + f'(\alpha)). & \end{array}$$

12) Αν $f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, να βρείτε τις συναρτήσεις f', g' . Ισχύει $f' = g'$;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ισχύει : $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$(f^\alpha(x))' = \alpha \cdot f^{\alpha-1}(x) \cdot f'(x)$
$(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$
$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$(a^{f(x)})' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
$(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$
$(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$
$(\varepsilon\phi f(x))' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$(\sigma\phi f(x))' = -\frac{1}{\eta\mu^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13) Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = (x^3 + 2x)^{2013}$
- ii. $f(x) = \ln^3 x$
- iii. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x}$
- iv. $f(x) = \ln(x^3 + 2x)$
- v. $f(x) = e^{x^3+2x}$
- vi. $f(x) = \eta\mu(x^3 + 2x)$
- vii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^3 + 2x)$
- viii. $f(x) = \varepsilon\phi(x^3 + 2x)$
- ix. $f(x) = \sigma\phi(x^3 + 2x)$
- x. $f(x) = \frac{1}{x^3 + 2x}$
- xi. $f(x) = x^{\eta\mu x}$

Λύση :

- i. $f'(x) = [(x^3 + 2x)^{2013}]' = 2013 \cdot (x^3 + 2x)^{2012} \cdot (x^3 + 2x)' = 2013 \cdot (x^3 + 2x)^{2012} \cdot (3x^2 + 2)$
- ii. $f'(x) = (\ln^3 x)' = 3\ln^2 x \cdot (\ln x)' = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{3\ln^2 x}{x}$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- iii. $f'(x) = (\sqrt{x^3 + 2x})' = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x}} \cdot (x^3 + 2x)' = \frac{3x^2 + 2}{2\sqrt{x^3 + 2x}}$
- iv. $f'(x) = (\ln(x^3 + 2x))' = \frac{1}{x^3 + 2x} \cdot (x^3 + 2x)' = \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x}$
- v. $f'(x) = (e^{x^3 + 2x})' = e^{x^3 + 2x} \cdot (x^3 + 2x)' = e^{x^3 + 2x} \cdot (3x^2 + 2)$
- vi. $f'(x) = (\eta\mu(x^3 + 2x))' = \sigma\upsilon\nu(x^3 + 2x) \cdot (x^3 + 2x)' = \sigma\upsilon\nu(x^3 + 2x) \cdot (3x^2 + 2)$
- vii. $f'(x) = (\sigma\upsilon\nu(x^3 + 2x))' = -\eta\mu(x^3 + 2x) \cdot (x^3 + 2x)' = -\eta\mu(x^3 + 2x) \cdot (3x^2 + 2)$
- viii. $f'(x) = (\epsilon\phi(x^3 + 2x))' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x^3 + 2x)} \cdot (x^3 + 2x)' = \frac{3x^2 + 2}{\sigma\upsilon\nu^2(x^3 + 2x)}$
- ix. $f'(x) = (\sigma\phi(x^3 + 2x))' = -\frac{1}{\eta\mu^2(x^3 + 2x)} \cdot (x^3 + 2x)' = -\frac{3x^2 + 2}{\eta\mu^2(x^3 + 2x)}$
- x. $f(x) = \left(\frac{1}{x^3 + 2x}\right)' = -\frac{1}{(x^3 + 2x)^2} \cdot (x^3 + 2x)' = -\frac{3x^2 + 2}{(x^3 + 2x)^2}$
- xi. (Υποδ. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει : $\alpha = e^{\ln \alpha}$. Μια συνάρτηση $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$, η οποία ορίζεται όταν $g(x) > 0$, για να βρούμε την $f'(x)$ γράφουμε τον τύπο της $f(x)$ ως εξής : $f(x) = [g(x)]^{h(x)} = e^{\ln(g(x))^{h(x)}} = e^{h(x) \cdot \ln g(x)}$ και στη συνέχεια παραγωγίζουμε)
 $f(x) = x^{\eta\mu x}$, με $A_f = (0, +\infty)$ και είναι : $f(x) = x^{\eta\mu x} = e^{\ln x^{\eta\mu x}} = e^{\eta\mu x \cdot \ln x}$ έτσι έχουμε :
 $f'(x) = (e^{\eta\mu x \cdot \ln x})' = e^{\eta\mu x \cdot \ln x} \cdot (\eta\mu x \cdot \ln x)' = x^{\eta\mu x} \cdot \left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x + \frac{\eta\mu x}{x}\right)$.

- 14) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = f(\eta\mu^2 x) - f(\sigma\upsilon\nu^2 x)$.

Λύση : $g'(x) = (f(\eta\mu^2 x) - f(\sigma\upsilon\nu^2 x))' = f'(\eta\mu^2 x)(\eta\mu^2 x)' - f'(\sigma\upsilon\nu^2 x)(\sigma\upsilon\nu^2 x)' =$
 $= f'(\eta\mu^2 x)2\eta\mu x(\eta\mu x)' - f'(\sigma\upsilon\nu^2 x)2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x)' =$
 $= f'(\eta\mu^2 x)2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + f'(\sigma\upsilon\nu^2 x)2\sigma\upsilon\nu x \eta\mu x = f'(\eta\mu^2 x) \cdot \eta\mu 2x + f'(\sigma\upsilon\nu^2 x) \cdot \eta\mu 2x.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

- 15) Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$
- ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$
- iii. $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$
- iv. $f(x) = \ln(x - 3)$
- v. $f(x) = \ln(2x^3 - 3x)$
- vi. $f(x) = \eta\mu(2x - 5)$
- vii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(2x^2 - 5)$
- viii. $f(x) = x \cdot \sqrt{e^x + 3}$
- ix. $f(x) = \eta\mu\sqrt{x}$
- x. $f(x) = x^x$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

xi. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

xii. $f(x) = \left(x + \frac{2}{x}\right)^x$

16) Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων

i. $f(x) = e^{2x+2}$

ii. $f(x) = e^{x^2+x}$

iii. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+5x-1}}$

iv. $f(x) = e^{-2x} \cdot (x^2 + 1)$

v. $f(x) = (2x^2 + x)^5$

vi. $f(x) = (3x^4 + 4x^3)^{-2}$

vii. $f(x) = (x-1)^{2/3}$

viii. $f(x) = \eta\mu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

ix. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - x\right)$

x. $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

xi. $f(x) = \eta\mu(x+1)^3$

xii. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x - 12}$

xiii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(3x^2 + 5)$

xiv. $f(x) = \varepsilon\phi e^{-x} + \sigma\upsilon\nu \ln x$

xv. $f(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \eta\mu 2x$

17) Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \sqrt{e^x + x^2} - e^{-2x^2}$

ii. $f(x) = \ln^2 x \cdot \sqrt{3 + 2\sigma\upsilon\nu x}$

iii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^2 - 5x)$

iv. $f(x) = \varepsilon\phi 3x + e^{\frac{x}{2}}$

v. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 3x$

vi. $f(x) = \ln^3(e^{-2x} + 1)$

vii. $f(x) = e^{-2x} \cdot (x^2 + 1)$

viii. $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\eta\mu 2x}$

ix. $f(x) = \eta\mu^2(\sqrt{x+1})$

x. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

18) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν :

i. $f(x) = x^2 \sqrt{1+x^3}$, $x_0 = 2$

ii. $f(x) = (2x)^{1/3} + (2x)^{2/3}$, $x_0 = 4$

iii. $f(x) = x^3 \eta \mu^3(\pi x)$, $x_0 = \frac{1}{6}$

iv. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2 - x}$, $x_0 = 3$.

19) Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i. $f(x) = x^{\ln x}$

ii. $f(x) = 2^{5x-3}$

iii. $f(x) = (\ln x)^x$, $x > 1$

iv. $f(x) = \eta \mu x \cdot e^{\sigma \nu \nu x}$

20) Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

ii. $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

21) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :
 $f(x^3 + 5x) = 5x^4 + 6x^2 + 4$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f'(6)$.

22) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = xf(\ln x)$ για κάθε $x > 0$. Στη συνέχεια αν δίνεται ότι $f(1) = f'(1) = 2$, να βρείτε την τιμή $g'(e)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

23) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$.

Λύση :

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot (\sqrt{x^2+1}+x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x + 1 \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot \left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2+1} \cdot (\sqrt{x^2+1})' = -\frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $\alpha f''(x) + \beta f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = (x \cdot e^{-x})' = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} + xe^{-x}(-x)' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = [(1-x)e^{-x}]' = (1-x)'e^{-x} + (1-x)(e^{-x})' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = e^{-x}(-1-1+x) = e^{-x}(x-2)$$

Άρα

$$\alpha f''(x) + \beta f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \alpha e^{-x}(x-2) + \beta(1-x)e^{-x} = xe^{-x} \Leftrightarrow \alpha x - 2\alpha + \beta - \beta x = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)x + \beta - 2\alpha = x \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \beta - 2\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \end{cases}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

25) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$.

26) Δίνεται συνάρτηση f , δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(\ln x) = 3e^{x-1} + \ln^2 x$, για κάθε $x > 0$. Να βρείτε το $f''(0)$.

27) Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι $P(x) + P'(x) + P''(x) = x^3 + 5x^2 + x + 3$.

(Υπόδειξη: Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό $n \geq 1$, τότε το $P'(x)$ έχει βαθμό $n-1$)

28) Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε $P(1) = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι $[P'(x)]^2 = 4P(x)$.

29) Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε $f(0) = 4$, $f'(-1) = 2$, $f''(2) = 4$ και $f^{(3)}(1) = 6$.

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} \eta \mu x$. Να δείξετε ότι $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

31) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε να ισχύει: $2f''(x) - f'(x) = 3f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 32) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2xf(x) = 4x^2 + 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

Λύση :

Στη σχέση : $f^3(x) - 2xf(x) = 4x^2 + 8$ (1) θέτω $x = 0$ και έχω : $f^3(0) = 8 \Leftrightarrow f(0) = 2$.

Η συνάρτηση $f^3(x) - 2xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισιμων, ομοίως και η συνάρτηση $4x^2 + 8$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω : $(f^3(x) - 2xf(x))' = (4x^2 + 8)' \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 8x$ (2)

Στη (2) για $x = 0$ έχω : $3f^2(0) \cdot f'(0) - 2f(0) - 2 \cdot 0 \cdot f'(0) = 8 \cdot 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^2 \cdot f'(0) - 2 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot f'(0) = 4 \Leftrightarrow f'(0) = \frac{1}{3}.$$

(Προσοχή : Στην παραπάνω άσκηση παραγωγίσαμε τη συναρτησιακή σχέση εφαρμόζοντας κανόνες παραγωγίσιμης, γιατί είχαμε την πληροφορία ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα (στο $\mathbb{R}$). Αν γνωρίζαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη μόνο σε ένα σημείο (στο 0) **δεν** θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε κανόνες παραγωγίσιμης στη δοσμένη σχέση και θα έπρεπε να βρούμε το $f'(0)$ με τον ορισμό)

- 33) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(xy) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ ισχύει : $f''(x) - f''(y) = \frac{2f(x)}{x^2} - \frac{2f(y)}{y^2}$.

Λύση : Παραγωγίζουμε τη σχέση $f(xy) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$ (1) ως προς x , θεωρώντας το y σταθερά : $(f(xy))' = (x^2 f(y) + y^2 f(x))' \Leftrightarrow f'(xy) \cdot (xy)' = 2xf(y) + y^2 f'(x) \Leftrightarrow yf'(xy) = 2xf(y) + y^2 f'(x)$ (2), επίσης με παραγωγή στη σχέση (2) έχουμε :

$$(yf'(xy))' = (2xf(y) + y^2 f'(x))' \Leftrightarrow yf''(xy) \cdot (xy)' = 2f(y) + y^2 f''(x) \Leftrightarrow y^2 f''(xy) = 2f(y) + y^2 f''(x) \Leftrightarrow f''(xy) = \frac{2f(y)}{y^2} + f''(x) \quad (3) \quad x, y \in \mathbb{R}^*$$

Τώρα παραγωγίζουμε την (1) ως προς y , θεωρώντας το x σταθερά : $(f(xy))' = (x^2 f(y) + y^2 f(x))' \Leftrightarrow f'(xy) \cdot (xy)' = x^2 f'(y) + 2yf(x) \Leftrightarrow xf'(xy) = x^2 f'(y) + 2yf(x)$ (4), επίσης με παραγωγή στη σχέση (4) έχουμε :

$$(xf'(xy))' = (x^2 f'(y) + 2yf(x))' \Leftrightarrow xf''(xy) \cdot (xy)' = x^2 f''(y) + 2f(x) \Leftrightarrow x^2 f''(xy) = x^2 f''(y) + 2f(x) \Leftrightarrow f''(xy) = f''(y) + \frac{2f(x)}{x^2} \quad (5) \quad x, y \in \mathbb{R}^*$$

Από (3) και (5) έχουμε :

$$\frac{2f(y)}{y^2} + f''(x) = f''(y) + \frac{2f(x)}{x^2} \Leftrightarrow f''(x) - f''(y) = \frac{2f(x)}{x^2} - \frac{2f(y)}{y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^*.$$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

34) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 3x + 2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε την $(f^{-1})'(3)$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Λύση :

i. Έχω : $D_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

Επίσης : $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 + 2 < 3x_2 + 2 \Leftrightarrow$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{x_1} + 3x_1 + 2 < e^{x_2} + 3x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα η $f(x)$ είναι «1-1» και άρα η $f(x)$

αντιστρέψιμη. Επίσης $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Άρα $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^{-1}(f(x)) = x$ οπότε : $(f^{-1}(f(x)))' = (x)' \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$, όμως $f'(x) = e^x + 3$ άρα : $(f^{-1})'(e^x + 3x + 2) \cdot (e^x + 3) = 1$ (3).

Στην (3) για $x = 0$ έχω : $(f^{-1})'(3) \cdot f'(0) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(3) \cdot 4 = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

35) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2f(x) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

36) Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) - 2x = 8x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$

37) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $e^{xf(x)} + 3f(x) = 19$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$

38) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + 3xf(x) = x^3 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$ αν γνωρίζουμε ότι η f είναι :

i. παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

ii. παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

39) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) + ae^{-f(x)} = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων :

i. Να βρείτε το a

ii. Να εκφράσετε την $f'(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$.

iii. Να βρείτε το $f'(0)$

40) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^2(x) \cdot f(2-x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε :

i. Το $f'(1)$

ii. Το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

41) Δίνεται παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{x+7}}{x^2 - 4} = \frac{17}{24}$$

i. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f'(2)$.

ii. Αν $g(x) = f(x^2 + 3x) + f^2(x) - f(x^2 + x)$, να βρείτε τη $g'(-2)$.

42) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε την $(f^{-1})'(3)$.

43) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f(x) \neq -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f^2(x) - f(x^2) = 4x^3 + 2x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(-1) \neq 0$

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 5\xi$.

44) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το $A(1,1)$, να βρείτε :

i. Το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$

ii. Το $f'(0)$

iii. Το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x+1}}{\eta\mu x}$.

45) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$f(x+y) = \frac{f(x)}{e^y} + \frac{f(y)}{e^x}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει : $e^x[f(x) + f'(x)] = e^y[f(y) + f'(y)]$.

46) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$f(xy) = f(x) + f(y) + x^2y^2 - x^2 - y^2$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ ισχύει : $xf'(x) - yf'(y) = 2(x^2 - y^2)$.

Β. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ**ΠΡΟΣΟΧΗ ΙΣΧΥΟΥΝ ΤΑ ΕΞΗΣ :**

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda_\varepsilon = f'(x_0) = \varepsilon\phi\omega$ όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
- Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Δηλαδή αν μια συνάρτηση δέχεται εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$, τότε δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη στο x_0 , αφού μπορεί να δέχεται και κατακόρυφη εφαπτομένη. (ο συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται άρα και το $f'(x_0)$). Αν όμως δέχεται εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) τότε είναι παραγωγίσιμη. Οι έννοιες εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ και παράγωγος στο x_0 είναι ταυτόσημες.
- Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω , τότε :
 - $\omega \in [0, \pi)$ και $\omega \neq \frac{\pi}{2}$.
 - ω οξεία $\Leftrightarrow f'(x_0) > 0$.
 - ω αμβλεία $\Leftrightarrow f'(x_0) < 0$.
 - $\omega = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ ($// x'x$).
- Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, μπορεί να έχει με τη C_f και άλλα κοινά σημεία. (π.χ. η εφαπτομένη της $f(x) = x^3$ στο $x_0 = 0$)

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ**1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ**

$\varepsilon\phi 0^\circ = 0$

$\varepsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\varepsilon\phi 45^\circ = 1 \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1$

$\varepsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\varepsilon\phi 90^\circ = \text{---}$

2^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

$\varepsilon\phi 180^\circ = 0$

$\varepsilon\phi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\varepsilon\phi 135^\circ = -1 \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{3\pi}{4} = -1$

$\varepsilon\phi 120^\circ = -\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ $M(x_0, f(x_0))$

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε γνωστό σημείο $M(x_0, f(x_0))$, χρησιμοποιούμε τον τύπο $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Βρίσκουμε το $f(x_0)$ άρα το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$. Στη συνέχεια βρίσκω την $f'(x)$ και το $f'(x_0)$ κάνω αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο και προκύπτει η εξίσωση της εφαπτομένης.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $A(2, f(2))$, τότε $(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x - 2)$. Έχω $f(2) = 7$ άρα το σημείο επαφής $A(2, f(2)) \rightarrow A(2, 7)$. Έχω : $f'(x) = 2x - 1$ άρα $f'(2) = 3$.

Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 7 = 3(x - 2) \Leftrightarrow y - 7 = 3x - 6 \Leftrightarrow y = 3x + 1$ Άρα : $(\varepsilon): y = 3x + 1$.

2) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2xf(x) = 4x^2 + 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $A(0, f(0))$, τότε $(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

Στη σχέση : $f^3(x) - 2xf(x) = 4x^2 + 8$ (1) θέτω $x = 0$ και έχω : $f^3(0) = 8 \Leftrightarrow f(0) = 2$.

Η συνάρτηση $f^3(x) - 2xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισιμων, ομοίως και η συνάρτηση $4x^2 + 8$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμία. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω : $(f^3(x) - 2xf(x))' = (4x^2 + 8)' \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 8x$ (2)

Στη (2) για $x = 0$ έχω : $3f^2(0) \cdot f'(0) - 2f(0) - 2 \cdot 0 \cdot f'(0) = 8 \cdot 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^2 \cdot f'(0) - 2 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 12 \cdot f'(0) = 4 \Leftrightarrow f'(0) = \frac{1}{3}$.

Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{3}x \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + 2$. Άρα : $(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + 2$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2, & x \leq 2 \\ x^2 + 5x - 10, & x > 2 \end{cases}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $M(2, f(2))$, τότε $(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x - 2)$. Έχω $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 \Leftrightarrow f(2) = 4$ άρα το σημείο επαφής $M(2, f(2)) \rightarrow M(2, 4)$. Επίσης πρέπει να βρω το $f'(2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 3x + 2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 1)}{x - 2} = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 5x - 10 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 7)}{x - 2} = 9 \quad \text{άρα} \quad f'$$

παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ με $f'(2) = 9$.

Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = 9(x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = 9x - 18 \Leftrightarrow y = 9x - 14$. Άρα : $(\varepsilon): y = 9x - 14$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

- 4) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ στις παρακάτω περιπτώσεις :
- i. $f(x) = x^4 - 5x + 6$, $M(1, f(1))$
 - ii. $f(x) = 2e^x$, $M(0, f(0))$
 - iii. $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$, $M(0, f(0))$
 - iv. $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 3}$, $M(1, f(1))$
 - iii. $f(x) = x \ln x$, $M(e, f(e))$
- 5) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x \leq -2 \\ 2x^2 + 3x + 6, & x > -2 \end{cases}$. Να βρείτε, αν υπάρχει, την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(-2, f(-2))$.
- 6) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \leq 2 \\ x^3 + 2ax^2 - x + 4, & x > 2 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- i. Να βρείτε το α
 - ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$.
- 7) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, & x \leq 1 \\ 2ax + 2\beta - 5, & x > 1 \end{cases} \quad a, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$.
- 8) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3$ σε οποιοδήποτε σημείο της $M(\alpha, \alpha^3)$, $\alpha \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο N εκτός του M. Στο σημείο N η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο M.
- 9) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα : $f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f'(3) = 5$ και στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(3, f(3))$.
- 10) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $2x^2 - 3x + 1 \leq f(x) \leq 3x^2 - 9x + 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για τη C_f ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(3, f(3))$, της οποίας και να βρείτε την εξίσωση.
- 11) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f'(1) = f''(1) = 2$. Αν $g(x) = f(e^x)$, τότε να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{g'}$ στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$.
- 12) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2f(x) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 13) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) - 2x = 8x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.
- 14) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $e^{xf(x)} + 3f(x) = 19$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.
- 15) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $3f(x^2 + x) - 11x = xf(3x - 1) - 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$.
- 16) Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $M\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right)$. Αν A, B είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι :
- Το M είναι μέσο του AB .
 - Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi \in \mathbb{R}^*$.
- 17) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-3h)}{h} = 8$ και $f(1) = 3$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.
- 18) Έστω μια συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$, για την οποία ισχύει : $f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
- 19) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2}{\sqrt{x+2} - 2} = -4$. Να αποδείξετε ότι για τη C_f ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(2, f(2))$ της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
- 20) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x}$. Έστω ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-2, -5)$ και η εφαπτομένη της f στο A σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$.
- Να βρείτε τα α, β .
 - Για $\alpha = -\frac{1}{4}$ και $\beta = 8$ να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της $f'(x)$ στο σημείο $B(-1, f'(-1))$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΚΛΙΣΗ ΤΗΣ

Όταν δε μας δίνεται το σημείο επαφής αλλά ένα στοιχείο για την κλίση της εφαπτομένης, τότε ξεκινάμε θεωρώντας το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$ το οποίο πρέπει και να υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας το στοιχείο για την κλίση της εφαπτομένης. Πιο συγκεκριμένα διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ): $y = \lambda_\zeta x + \beta$, όταν $\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow f'(x_0) = \lambda_\zeta$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία (ζ): $y = \lambda_\zeta x + \beta$, όταν $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{\lambda_\zeta}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, όταν $\lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ σχηματίζει γωνία $\omega \neq 90^\circ$ με τον άξονα $x'x$, όταν $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\phi\omega \Leftrightarrow f'(x_0) = \varepsilon\phi\omega$ (ισχύει ότι $\varepsilon\phi(\pi - \omega) = -\varepsilon\phi\omega$)
Αφού βρούμε το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$, κάνουμε αντικατάσταση στον τύπο : $(\varepsilon) : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 21) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που
- Έχει συντελεστή διεύθυνσης 5
 - Είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ): $y = x + 5$
 - Είναι κάθετη στην ευθεία (η): $x - 3y + 12 = 0$
 - Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
 - Σχηματίζει γωνία με τον άξονα $x'x$ 45° .

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $M(x_0, f(x_0))$, τότε $(\varepsilon) : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Επίσης $f'(x) = -2x + 3$.

- Η (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης 5 άρα $f'(x_0) = 5 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 5 \Leftrightarrow x_0 = -1$. Άρα $f(-1) = -4$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M(-1, f(-1)) \rightarrow M(-1, -4)$. Ισχύει : $(\varepsilon) : y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y + 4 = 5(x + 1) \Leftrightarrow y + 4 = 5x + 5 \Leftrightarrow y = 5x + 1$. Άρα : $(\varepsilon) : y = 5x + 1$.
- Η (ε)//(ζ): $y = x + 5 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Άρα $f(1) = 2$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M(1, f(1)) \rightarrow M(1, 2)$. Ισχύει :

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = x - 1 \Leftrightarrow y = x + 1. \quad \text{Άρα} \quad : \\ (\varepsilon): y = x + 1.$$

$$\text{iii. } (\varepsilon) \perp (\eta): x - 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\eta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = -3 \quad \left(\lambda_{\eta} = -\frac{A}{B} = \frac{1}{3} \right) \quad (\text{Όταν δυο ευθείες είναι} \\ \text{κάθετες οι συντελεστές διεύθυνσης τους είναι αντιθετοαντιστροφοί}). \\ \lambda_{\varepsilon} = -3 \Leftrightarrow f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = -3 \Leftrightarrow -2x_0 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 3. \text{ Άρα } f(3) = 0 \text{ δηλαδή} \\ \text{το σημείο επαφής είναι } M(3, f(3)) \rightarrow M(3, 0). \text{ Ισχύει} \quad : \\ (\varepsilon): y - f(3) = f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y - 0 = -3(x-3) \Leftrightarrow y = -3x + 9. \text{ Άρα: } (\varepsilon): y = -3x + 9.$$

$$\text{iv. } (\varepsilon) // x'x \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}. \text{ Άρα } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \text{ δηλαδή το} \\ \text{σημείο επαφής είναι } M\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) \rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right). \text{ Ισχύει} \quad : \\ (\varepsilon): y - f\left(\frac{3}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{9}{4} = 0\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{9}{4}. \text{ Άρα: } (\varepsilon): y = \frac{9}{4}. \\ (\text{Θα μπορούσαμε να πούμε ότι επειδή } (\varepsilon) // x'x \text{ άρα θα είναι της μορφής } y = y_0 \text{ και} \\ \text{αφού βρούμε το σημείο επαφής } M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right), \text{ να πούμε κατευθείαν } (\varepsilon): y = \frac{9}{4})$$

$$\text{v. } \text{Η } (\varepsilon) \text{ σχηματίζει με τον άξονα } x'x \text{ γωνία } 45^\circ \text{ άρα} \\ \lambda_{\varepsilon} = \varepsilon\phi\omega \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = \varepsilon\phi 45^\circ \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = 1 \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1. \text{ Άρα } f(1) = 2 \\ \text{δηλαδή το σημείο επαφής είναι } M(1, f(1)) \rightarrow M(1, 2). \text{ Ισχύει} \quad : \\ (\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x + 1 \text{ Άρα: } (\varepsilon): y = x + 1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που

- i. Έχει συντελεστή διεύθυνσης 3
- ii. Είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = 5x + 7$
- iii. Είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): x - 7y + 13 = 0$
- iv. Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
- v. Σχηματίζει γωνία με τον άξονα $x'x$ 45° .
- vi. Σχηματίζει γωνία με τον άξονα $x'x$ 135° .

23) Να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 1$ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{2\pi}{3}$.

24) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της $f(x) = x \ln x$ που είναι παράλληλες στη διχοτόμο της γωνίας $x'Oy$.

25) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$ που είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

26) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της f στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στην ευθεία $(\zeta): y = -2x - 1$. Στη συνέχεια να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων.

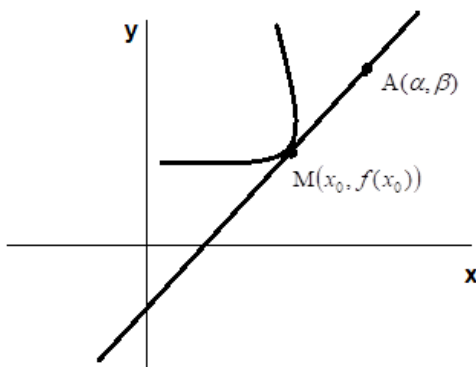
27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της f ώστε οι εφαπτομένες σ' αυτά να είναι παράλληλες στην ευθεία $(\zeta): y = 2x$.

28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-2x}(x^2 + 5)$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της f ώστε οι εφαπτομένες σ' αυτά να είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

29) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :
 $f(x) = \eta\mu 2x - 2\eta\mu^2 x$, $x \in [0, 2\pi]$, στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα των x .

30) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ σε οποιοδήποτε σημείο της σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΠΟΥ ΔΕΝ ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΗ C_f



Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από ένα σημείο $A(\alpha, \beta)$ που **δεν ανήκει** στη C_f , εργαζόμαστε ως εξής :

- 1) θεωρούμε $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής
- 2) γράφουμε τον τύπο της εφαπτομένης $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
- 3) η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, \beta)$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της, Δηλ. $\beta - f(x_0) = f'(x_0)(\alpha - x_0)$
- 4) από την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε την τιμή (ή τις τιμές) του x_0 και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης.

(Προσοχή : σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να μπερδεύουμε το σημείο επαφής με το σημείο διέλευσης.)

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

31) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ που διέρχονται από το σημείο $A(3,2)$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $M(x_0, f(x_0))$, τότε $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Επίσης $f'(x) = 6x - 5$.

Άρα $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (3x_0^2 - 5x_0 + 2) = (6x_0 - 5)(x - x_0)$ (1)

Όμως η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$ άρα οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την

$$\begin{aligned} \text{εξίσωση της (1) δηλαδή: } (\varepsilon): y - (3x_0^2 - 5x_0 + 2) &= (6x_0 - 5)(x - x_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 - (3x_0^2 - 5x_0 + 2) &= (6x_0 - 5)(3 - x_0) \Leftrightarrow 2 - 3x_0^2 + 5x_0 - 2 = 18x_0 - 6x_0^2 - 15 + 5x_0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x_0^2 - 18x_0 + 15 &= 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 6x_0 + 5 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = 5 \end{aligned}$$

➤ Για $x_0 = 1$, $f(x_0) = f(1) = 0$ και $f'(x_0) = f'(1) = 1$ άρα $(\varepsilon_1): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 0 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$ άρα $(\varepsilon_1): y = x - 1$

➤ Για $x_0 = 5$, $f(x_0) = f(5) = 52$ και $f'(x_0) = f'(5) = 25$ άρα $(\varepsilon_2): y - f(5) = f'(5)(x - 5) \Leftrightarrow y - 52 = 25(x - 5) \Leftrightarrow y - 25 = 25x - 125 \Leftrightarrow y = 25x - 73$ άρα $(\varepsilon_2): y = 25x - 73$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

32) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

33) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

34) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^2$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-1,-3)$.

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{7-2x}{3-x}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(3,0)$.

36) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 6x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(-3,-10)$.

37) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Ιούνιος 2005)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΝΑ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΗ C_f

Η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ εφάπτεται στη C_f , αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in D_f$, ώστε να

$$\text{ισχύει : } \begin{cases} f'(x_0) = \lambda & (1) \\ M(x_0, f(x_0)) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow f(x_0) = \lambda x_0 + \beta & (2) \end{cases}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

38) Αν η ευθεία $y = 6x - 2$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - \alpha x + \beta$ στο σημείο $M(2, f(2))$,

i. Να βρείτε τα α, β .

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 4$ εφάπτεται στη C_f .

Λύση :

i. Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $M(2, f(2))$. Επίσης $f'(x) = 4x - \alpha$.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Η} & \text{ευθεία} & y = 6x - 2 & \text{εφάπτεται} & \text{στη} & C_f & \text{στο} \\ M(2, f(2)) & \Leftrightarrow & \begin{cases} f(2) = 6 \cdot 2 - 2 \\ f'(2) = 6 \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} 8 - 2\alpha + \beta = 10 \\ 8 - \alpha = 6 \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} -2\alpha + \beta = 2 \\ \alpha = 2 \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 6 \end{cases} \end{array}$$

ii. Για $\alpha = 2$ και $\beta = 6$ ο τύπος της f γίνεται : $f(x) = 2x^2 - 2x + 6$ άρα $f'(x) = 4x - 2$. Η ευθεία $y = 2x + 4$ εφάπτεται στη C_f , αν και μόνο αν υπάρχει σημείο $N(x_0, f(x_0))$ της

$$\begin{aligned} C_f, \text{ ώστε να ισχύουν : } & \begin{cases} f(x_0) = 2 \cdot x_0 + 4 \\ f'(x_0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - 2x_0 + 6 = 2x_0 + 4 \\ 4x_0 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - 4x_0 + 2 = 0 \\ 4x_0 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 1 \end{cases}. \text{ Άρα η ευθεία } y = 2x + 4 \text{ εφάπτεται} \\ & \text{στη } C_f \text{ στο σημείο } N(1, f(1)) \rightarrow N(1, 6). \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

39) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\zeta): y = -3x + 6$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 5x + 7$

40) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\eta): x - 2y = 0$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$

41) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με : $f'(1) = 1$ και $g(x) = f(x^3 + x + 1) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

ii. Να βρείτε το $g'(0)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται της C_g στο $B(0, g(0))$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

42) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 3$ με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y = 10x - 9$.

i. Να βρείτε τα β, γ ii. Να αποδείξετε ότι και η ευθεία $(\zeta): y = 3x + 2$ εφάπτεται της C_f .

43) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(-1, f(-1))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y = -4x + 7$.

i. Να βρείτε τα β, γ ii. Να αποδείξετε ότι και η ευθεία $(\zeta): y = 2x + 4$ εφάπτεται της C_f .

44) Αν η ευθεία $y = 2\alpha x - \beta$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x$ στο σημείο $M(1, f(1))$, να βρείτε τα α, β .

45) Αν η ευθεία $y = 2x - 1$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 - \beta x - 2$ στο σημείο $M(-1, f(-1))$, να βρείτε τα α, β .

46) Αν η ευθεία $y = \lambda x - 1$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x$, να βρείτε το σημείο επαφής και στη συνέχεια την ευθεία (ε) .

47) Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{xOy}$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = xe^{-\lambda x}$, $\lambda \neq 0$, να βρείτε το σημείο επαφής.

48) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x^2 + 3x$.

i. Να βρείτε της εφαπτομένη της καμπύλης της f στο $x_0 = 1$ και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

ii. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη, εφάπτεται και στην καμπύλη της g .

49) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f στο σημείο $A(4, f(4))$ έχει εφαπτομένη την ευθεία $y = x - 1$. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f^2(x) - 9}{\sqrt{x} - 2}$.

50) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και θεωρούμε και τη συνάρτηση $g(x) = (x^3 - x^2)f(x^2 - 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ευθεία $y = 40x - 76$ εφάπτεται στη C_g στο σημείο της $A(2, g(2))$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $B(3, f(3))$.

51) Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x^2) = (2x^3 + 3x^2)^2 \cdot g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$, τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $B(-1, g(-1))$.

52) Δίνεται άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση $y = 2x - 3$.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x^2 + x) + f^2(x)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $B(-2, g(-2))$.

53) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^2(x) + 8x = 2x^3 + (x^2 + 4)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 4x - 1$ εφάπτεται στη C_f και να βρείτε το σημείο επαφής.

54) Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(1) = 1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $B(0, g(0))$.

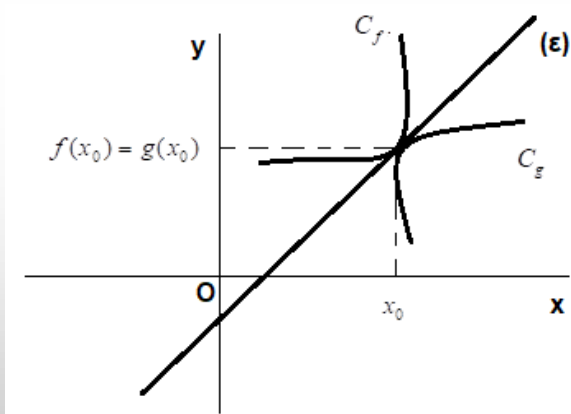
55) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \geq 2 \\ 3x^2 - 10x - 4a, & x < 2 \end{cases}$ και η συνάρτηση

$g(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το a ii. Να βρείτε την $f'(x)$

ii. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$ εφάπτεται και στη C_g στο σημείο $B(3, g(3))$, τότε να βρείτε τα β, γ .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΥΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥΣ



Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δυο συναρτήσεων f, g έχουν κοινή εφαπτομένη (ή αλλιώς εφάπτονται μεταξύ τους) στο κοινό σημείο τους $M(x_0, y_0)$, αν ισχύει : $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

56) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ και $g(x) = x^2 + 2\kappa x + \lambda$. Να βρεθούν τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = -1$.

Λύση :

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x-1} \right)' = \frac{(2x)'(x-1) - 2x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = 2x + 2\kappa$$

Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους με $x_0 = -1$, άρα ισχύει :

$$f(-1) = g(-1) \text{ και } f'(-1) = g'(-1)$$

$$\text{Έχω } f(-1) = g(-1) \Leftrightarrow \frac{-2}{-2} = 1 - 2\kappa + \lambda \Leftrightarrow 1 = 1 - 2\kappa + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2\kappa \quad (1)$$

$$\text{Και } f'(-1) = g'(-1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = -2 + 2\kappa \Leftrightarrow -1 = -4 + 4\kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{3}{4}, \text{ άρα από (1) } \lambda = 2\kappa \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

57) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2$ και $g(x) = x^2 + 2\beta x + \alpha$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

58) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2 - 7x + 7$ και $g(x) = x^2 - 3x + 3$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g στο κοινό σημείο τους έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε και την εξίσωση.

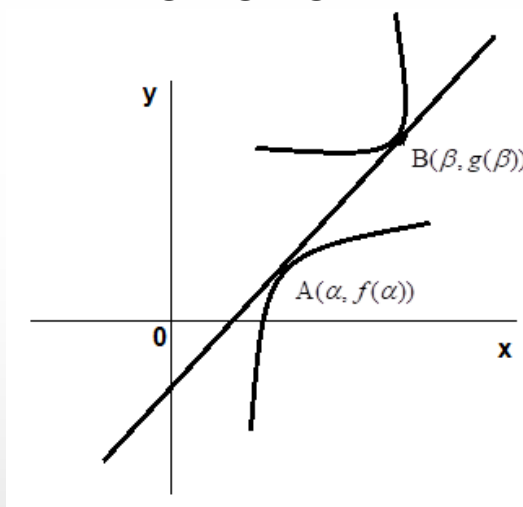
59) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - 3x + 4$ και $g(x) = 3x^2 - 3x$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g στο κοινό σημείο τους έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε και την εξίσωση.

60) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 3$ και $g(x) = \frac{1}{x}$.

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g

ii. Να βρείτε το διάστημα όπου η C_f είναι κάτω από τη C_g

iii. Να δείξετε ότι στο κοινό σημείο τους οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΥΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΜΗ ΚΟΙΝΟ ΤΟΥΣ ΣΗΜΕΙΟ

Για να βρούμε, αν υπάρχει, κοινή εφαπτομένη (ε) των C_f , C_g σε μη κοινό σημείο τους, εργαζόμαστε ως εξής :

1) θεωρούμε $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ τα σημεία επαφής της (ε) με τις C_f και C_g αντίστοιχα

2) η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ είναι :
 $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$ (1) ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(\beta, g(\beta))$ είναι :

$y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y = g'(\beta)x - \beta g'(\beta) + g(\beta)$ (2)

3) για να παριστάνουν οι (1) και (2) την ίδια ευθεία πρέπει :

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ -\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta g'(\beta) + g(\beta) \end{cases}$$

4) από το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε τα α, β .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

61) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = x^2 - 7x + 16$. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των C_f , C_g .

Λύση : $f(x) = x^2 - 3x + 4$ με $D_f = \mathbb{R}$ και $f'(x) = 2x - 3$ και $g(x) = x^2 - 7x + 16$ με $D_g = \mathbb{R}$ και $g'(x) = 2x - 7$. Αρχικά θα εξετάσουμε αν οι C_f , C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους. Για να βρούμε κοινά σημεία των C_f , C_g , λύνουμε την εξίσωση :
 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = x^2 - 7x + 16 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$, άρα το κοινό σημείο των C_f , C_g είναι το $M(3, f(3)) \rightarrow M(3, 4)$. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους M πρέπει να ισχύει : $f(3) = g(3) \Leftrightarrow 4 = 4$ που ισχύει, και $f'(3) = g'(3) \Leftrightarrow 3 = -1$ που δεν ισχύει. Άρα οι C_f , C_g δεν έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους.

Θα εξετάσουμε τώρα αν έχουν κοινή εφαπτομένη σε μη κοινό σημείο. Έστω (ε) η κοινή εφαπτομένη των C_f , C_g και $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ τα σημεία επαφής της (ε) με τις C_f και C_g αντίστοιχα.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ είναι :
 $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$ (1) ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(\beta, g(\beta))$ είναι : $y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y = g'(\beta)x - \beta g'(\beta) + g(\beta)$ (2)

Για να παριστάνουν οι (1) και (2) την ίδια ευθεία πρέπει :

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ -\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta g'(\beta) + g(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3 = 2\beta - 7 \\ -\alpha(2\alpha - 3) + \alpha^2 - 3\alpha + 4 = -\beta(2\beta - 7) + \beta^2 - 7\beta + 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha - 2\beta = -4 \\ -2\alpha^2 + 3\alpha + \alpha^2 - 3\alpha + 4 = -2\beta^2 + 7\beta + \beta^2 - 7\beta + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ -\alpha^2 + 4 = -\beta^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 2, (1) \\ \beta^2 - \alpha^2 = 12, (2) \end{cases} \Leftrightarrow \text{η (2) λόγω της (1) γίνεται } \beta^2 - \alpha^2 = 12 \Leftrightarrow \overset{(1)}{\beta^2 - (\beta - 2)^2} = 12 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \beta^2 - \beta^2 + 4\beta - 4 = 12 \Leftrightarrow 4\beta = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$ και από (1) $\alpha - 4 = -2 \Leftrightarrow \alpha = 2$. Άρα τα σημεία επαφής είναι $A(2, f(2)) \rightarrow A(2, 2)$ και $B(4, g(4)) \rightarrow B(4, 4)$, ενώ η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι : $(\varepsilon) : y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x$ δηλαδή $(\varepsilon) : y = x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

62) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f , C_g αν $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = x^2 + x + 4$.

63) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$.

64) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f , C_g αν $f(x) = x^2 - x - 2$ και $g(x) = x^2 - 5x + 6$.

65) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 4 - x^2$ και $g(x) = -x^2 + 8x - 20$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΥΠΑΡΞΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΠΑΦΗΣ**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**

66) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x + x^2 - x$ στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να είναι κάθετη στην ευθεία : $(\zeta) : x + y + 2017 = 0$.

Λύση :

Έχουμε $A_f = \mathbb{R}$ και $f'(x) = e^x + 2x - 1$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ με $(\varepsilon) : y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ τότε $(\varepsilon) \perp (\zeta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1$

Δηλ. $f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow e^\xi + 2\xi - 1 = 1 \Leftrightarrow e^\xi + 2\xi - 2 = 0$. Έστω $g(x) = e^x + 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Θα δείξω ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Εφαρμόζω Θ. Bolzano για τη $g(x)$ στο $[0,1]$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = e^0 - 2 = -1 < 0 \\ g(1) = e + 2 - 2 = e > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) \cdot g(1) < 0$$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

67) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει :

- i. Ένα τουλάχιστον σημείο A της C_f με τετμημένη $x_1 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο A να είναι παράλληλη στην ευθεία : $(\zeta) : 12x - 2y + 2011 = 0$.
- ii. Ένα τουλάχιστον σημείο B της C_f με τετμημένη $x_2 \in (1,2)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο B να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -16.

68) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = \ln x - 2x^2$ στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

69) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2$ και $g(x) = \ln x$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**

70) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 3x + 2$.

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 3$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Λύση :

- Έχω : $D_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

$$\text{Επίσης : } x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 + 2 < 3x_2 + 2 \Leftrightarrow (2)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{x_1} + 3x_1 + 2 < e^{x_2} + 3x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα η $f(x)$ είναι «1-1» και άρα η $f(x)$ αντιστρέψιμη. Επίσης $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Άρα $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

- Έστω (ε) η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $M(3, f^{-1}(3))$ τότε :

$$(ε) : y - f^{-1}(3) = (f^{-1})'(3)(x - 3) \quad (3)$$

Για $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι : $f^{-1}(3) = \alpha \Leftrightarrow f(f^{-1}(3)) = f(\alpha) \Leftrightarrow 3 = f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) = f(0) \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Άρα $\boxed{f^{-1}(3) = 0}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^{-1}(f(x)) = x$ οπότε : $(f^{-1}(f(x)))' = (x)' \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$, όμως $f'(x) = e^x + 3$ άρα : $(f^{-1})'(e^x + 3x + 2) \cdot (e^x + 3) = 1 \quad (4)$.

Στην (4) για $x = 0$ έχω : $(f^{-1})'(3) \cdot f'(0) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(3) \cdot 4 = 1 \Leftrightarrow \boxed{(f^{-1})'(3) = \frac{1}{4}}$.

Άρα : (3) (ε) : $y - f^{-1}(3) = (f^{-1})'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{1}{4}(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

71) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 3$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

72) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + 2x^3$.

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 0$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Γ. ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ****ΘΕΩΡΗΜΑ 1^ο**

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $g'(x) \neq 0$ σε περιοχή του x_0 με εξαίρεση

ίσως το x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2^ο

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $g'(x) \neq 0$ σε περιοχή του x_0 με εξαίρεση

ίσως το x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\frac{0}{0}$

Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία, εφαρμόζω το Θ. De L'Hospital (παραγωγίζω αριθμητή και παρονομαστή). Αν έχουμε και πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

$$\text{π.χ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \eta\mu x)'}{(\sigma\upsilon\nu x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{-\eta\mu x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu x)'}{(-\eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x} = \frac{0}{-1} = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1) Να υπολογιστούν τα όρια :

$$\begin{aligned} &\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x + \eta\mu 2x}{\eta\mu 5x - \eta\mu 2x} \quad \text{iv) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x^2 - x}{x^3 - x^2} \quad \text{v) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x \eta\mu x} \\ &\text{vi) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad \text{vii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\eta\mu x} \quad \text{viii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad \text{ix) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{e^x - 1} \end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\frac{\infty}{\infty}$

Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία, εφαρμόζω το Θ. De L'Hospital (παραγωγίζω αριθμητή και παρονομαστή). Αν έχουμε και πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

$$\text{π.χ. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2}{e^x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot 2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{xe^x} = 0$$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Να υπολογιστούν τα όρια :

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^x}{x^2 + e^x} & \text{ii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + \ln x}{3x + \ln x} & \text{iii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln x}{e^x} & \text{iv)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x} \\ \text{v)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} & \text{vii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 2)}{x} & \text{viii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{\ln(x^2 + 5)} & \text{ix)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x} \end{array}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $0 \cdot \infty$

Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία, γράφω $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ ή $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

οπότε έχω απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ και λειτουργώ όπως παραπάνω.

$$\text{π.χ.1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\text{π.χ.2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) \stackrel{-\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3) Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (2 - x^2)$ iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$ v) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \ln x)$ vi) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \ln x$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\infty - \infty$

A. Όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$. Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία $\infty - \infty$, γράφουμε τον τύπο με τη μορφή $f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)$ ή $g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)$. Για το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$, και εφαρμόζουμε Θ. De L'Hospital.

π.χ.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x + e^x) \stackrel{+\infty - \infty + \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{e^x}{x} \right) \right) = l$

όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

επίσης : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$

Άρα : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{e^x}{x} \right) \right) = +\infty(1 - 0 + \infty) = +\infty$

π.χ.2 ** (Ειδική περίπτωση!!) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 1) - x]$

(σε όρια αυτής της μορφής, αν δουλέψουμε σύμφωνα με τη μεθοδολογία και το π.χ.1 θα οδηγηθούμε σε απροσδιοριστία $0 \cdot \infty$, για αυτό χρησιμοποιώ το εξής τέχνασμα :)

Έχουμε : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 1) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 1) - \ln e^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{e^x + 1}{e^x} \right) = l$

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + 1)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$

Άρα : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{e^x + 1}{e^x} \right) = \ln 1 = 0$

B. Όταν ο τύπος είναι διαφορά, με ένα τουλάχιστον όρο κλάσμα, και έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\infty - \infty$, κάνουμε ομώνυμα και μετά βρίσκουμε το Όριο.

π.χ. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{xe^x - x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(xe^x - x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(e^x + xe^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - x]$ iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x)$
iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2)$ v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$ vi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x^3 + e^{-x}]$ vii)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(1 + e^x)]$
viii) ** $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + x) - x]$ ix)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - 1) - x + 1]$ x)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 + 1) - e^{x^2+1}]$

5) Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{1 - \sigma \nu \kappa} - \frac{1}{x} \right)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία, γράφω $f(x)^{g(x)} = e^{\ln[f(x)^{g(x)}]} = e^{g(x) \ln[f(x)]}$. Στη συνέχεια βρίσκω το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot \ln(f(x))] = l$. Το ζητούμενο όριο είναι e^l .

π.χ. 1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}$, έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Άρα : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6) Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\eta \mu x}$ iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ Θ. HOSPITAL ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :**

7) Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς στη θέση $x=0$ η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} e^x - e^{-x} - x, & x \leq 0 \\ \frac{x - \eta\mu x}{x\eta\mu x}, & x > 0 \end{cases}$

8) Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς στη θέση $x=0$ η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} e^{1-\sigma\upsilon\iota x} + x, & x \leq 0 \\ \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x}, & x > 0 \end{cases}$

9) Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=1$ η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \leq 1 \\ x - \ln x, & x > 1 \end{cases}$

10) Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=0$ η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x - x^2, & x \leq 0 \\ e^x + x^2, & x > 0 \end{cases}.$$

11) Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=0$ η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \leq 0 \\ x \ln x, & x > 0 \end{cases}.$

12) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(x) - f(x-h) - f(x+h)}{h^2} = e^x + x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε την } f''.$$

13) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = 0.$

i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

iii. Αν $h(x) = e^{-x} f(x)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_h στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ είναι παράλληλες. (Θέμα πανελληνίων)

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΙΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ 2.2-2.3

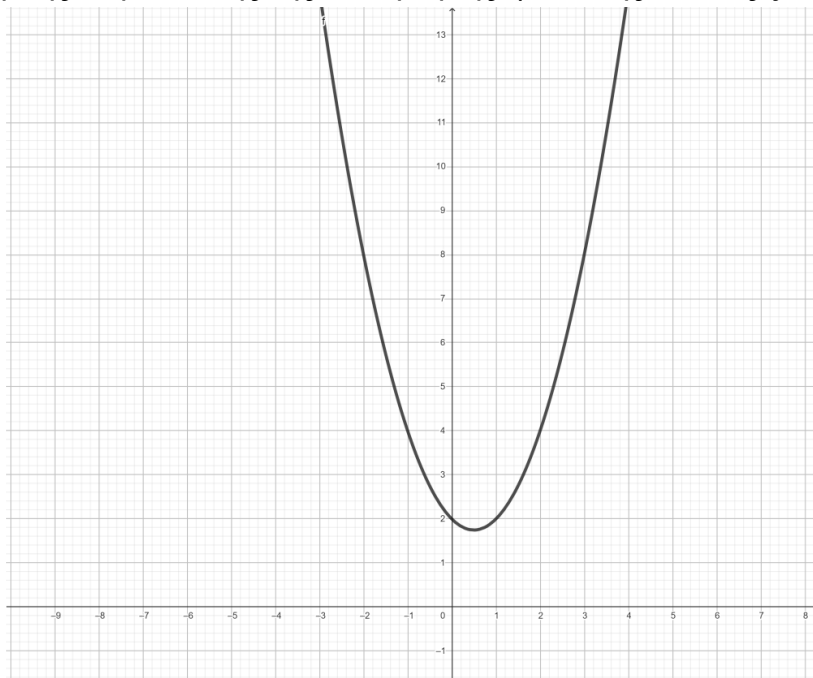
ΘΕΜΑ 2 #33816

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = x^2 - x + 2$.

α) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $B(1,2)$. (Μονάδες 8)

γ) Αφού αντιγράψετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g , να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $y = x + 1$.



(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 #31743

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \ln x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = f'(x) - \frac{1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν $\varphi(0) < 0$ και

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0.$$

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

(Μονάδες 9)

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 2 #28302

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = -2$ και $f'(0) = 0$. Έστω επίσης οι συναρτήσεις $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -x$ και $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την τιμή $(g \circ f)(0)$. (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε την παράγωγο $g'(-2)$. (Μονάδες 6)
- γ) Να βρείτε την παράγωγο της $g \circ f$ στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 6)
- δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g \circ f$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2 #27315

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{αν } x < 2 \\ ax^2 - 4, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{με } a \in \mathbb{R}.$$

- α) Να βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο $x_0 = 2$, δηλαδή τα $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. (Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. (Μονάδες 07)
- γ) Αν $a = 2$, να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης f . (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 2 #26630

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \\ \sin x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 9)
- β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2 #25762

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 1$. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2 #24757

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, 1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45° .

- α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$. (Μονάδες 8)
- β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, 1)$. (Μονάδες 8)
- γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$. (Μονάδες 9)

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 2 #24755

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$. (Μονάδες 10)
γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2 #33632

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ -x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

- α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και να σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 13)
β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(0, f(0))$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 #28340

Έστω μια συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -x + 1$. Δίνεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$, έχει εξίσωση $y = g(x)$.

- α) Να βρείτε το $f(-1)$ και το $f'(-1)$. (Μονάδες 5)
β) Να βρείτε:
i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$, (Μονάδες 6)
ii. τις παραγώγους $(f \circ g)'(2)$ και $(g \circ f)'(-1)$. (Μονάδες 8)
γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_{f \circ g}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = 2$ και η εφαπτομένη της $C_{g \circ f}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$, ταυτίζονται. (Μονάδες 6)