

2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

28. ΟΡΙΣΜΟΣ (2004, 2009)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση :

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Σχόλια :

α) Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ θέσουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx , ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange.

β) Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f , τότε: Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{και είναι ίσα}$$

29. Α) Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ **Β)** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$. **(2000)****Απάντηση :****Α)** Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .**Β)** Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Σχόλια :

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 . Δηλαδή, είναι $\boxed{\lambda = f'(x_0)}$,

οπότε η εξίσωση της ε φαπτομένης ε είναι : $\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$ Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο A** ή **κλίση της f στο x_0** .

- Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή, είναι $v(t_0) = S'(t_0)$.

30. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(2000, 2003, 2007 Β', 2013 Β', 2017 Σ-Λ με εξήγηση, 2022Β')****Απόδειξη :**Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε θα είναι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .**Σχόλιο :**

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα :

Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναιπαραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$.**(2017)**Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Αν, όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε θα είναι και συνεχής στο x_0 ,Ισχύει όμως ότι : Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ 1 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ

- Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 .

$$\text{Δηλ. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Αν x_0 είναι σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f και η f δίνεται αριστερά του x_0 και δεξιά του x_0 με διαφορετικό τύπο (σε κλάδους), τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αν και μόνο αν, τα πλευρικά όρια :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \text{ όπου } \alpha \text{ πραγματικός αριθμός.}$$

- **ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΤΟ $f'(x_0)$**

Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 .

$$\text{Δηλ. } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ 2 : ΤΙ ΕΚΦΡΑΖΕΙ Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

- Το **ρυθμό μεταβολής** του $y=f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$.
- Το **συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ε** της γραφικής παράστασης της f , στο σημεία επαφής $A(x_0, f(x_0))$ δηλαδή $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\phi\omega = f'(x_0)$.
- Την **ταχύτητα** $v(t_0)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του δίνεται από τη συνάρτηση $x(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 . Είναι $v(t_0) = x'(t_0)$.
- Την **επιτάχυνση** $a(t_0)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $v(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 . Είναι $a(t_0) = v'(t_0)$.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ 3 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
- Αν δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : Παράγωγος στο x_0 συνάρτησης απλού τύπου**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**

1) Να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = x^2 + 1$ στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση :

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ άρα } D_f = \mathbb{R}.$$

Έχουμε : $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ισχύει $f'(0) = 0$.

2) Να βρείτε αν υπάρχει την παράγωγο της $f(x) = \sqrt{x-2}$ στο σημείο $x_0 = 2$.

Λύση :

$$f(x) = \sqrt{x-2} \text{ και } D_f = [2, +\infty).$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-2}}{(x-2) \cdot \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2) \cdot \sqrt{x-2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty. \end{aligned}$$

Το παραπάνω όριο υπάρχει, αλλά δεν είναι πραγματικός αριθμός, άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : Παράγωγος και συνέχεια – παράγωγος στο x_0 συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0 .
Αν όμως δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση :

Θα εξετάσω πρώτα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3) = 0$$

$f(0) = 0^3 = 0$ Άρα η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και άρα η $f(x)$ δεν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 4) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x \leq 1 \\ 2x^2 - 3x + 3, & x > 1 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη

στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση :

Θα εξετάσω πρώτα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 - 3x + 3) = 2$$

$f(1) = 1^2 - 1 + 2 = 2$ Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Θα εξετάσω τώρα αν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x + 2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x - 1)}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3x + 3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(2x - 1)}{x - 1} = 1$$

Άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 1$

- 5) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta\mu(x - 1), & x \leq 1 \\ \sqrt{x + 3} - 2, & x > 1 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη

στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση :

Θα εξετάσω πρώτα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\eta\mu(x - 1)) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x + 3} - 2) = 0$$

$f(1) = \eta\mu(1 - 1) = 0$ Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Θα εξετάσω τώρα αν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\eta\mu(x - 1)}{x - 1} \stackrel{\substack{\text{Θέτω} \\ x - 1 = u}}{=} \lim_{\substack{\text{Όταν } x \rightarrow 1^- \\ \text{τότε } u \rightarrow 0}} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x + 3} - 2)(\sqrt{x + 3} + 2)}{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)} = \frac{1}{4}$$

Άρα η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. (Παρατηρώ δηλαδή ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 αλλά να μην είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό)

- 6) Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και $f(x) = (x - \eta\mu x)g(x)$ να βρεθεί η τιμή $f'(0)$.

Λύση :

Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) \in \mathbb{R}$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$\begin{aligned}\text{Επίσης : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \eta\mu x)g(x) - (0 - 0)g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \eta\mu x)g(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) g(x) \right] = (1 - 1)g(0) = 0. \text{ Άρα η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0 \text{ με} \\ f'(0) &= 0.\end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : Παράγωγος στο x_0 συνάρτησης με απόλυτη τιμή

Αν έχουμε συνάρτηση που περιέχει απόλυτες τιμές και θέλουμε να βρούμε την παράγωγο σε ένα σημείο x_0 , βρίσκουμε τα πρόσημα των παραστάσεων που περιέχονται στην απόλυτη τιμή (κατασκευάζοντας πίνακα προσήμων) και με βάση τα πρόσημα βγάζουμε τις απόλυτες τιμές. Αν χρειαστεί γράφουμε τη συνάρτηση με πολλαπλό τύπο και κάνουμε χρήση πλευρικών ορίων τόσο για την συνέχεια όσο και για την παραγωγισιμότητα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

7) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x - 1| + 3$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση : Έχω : $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+

$$\text{Άρα η } f(x) = |x - 1| + 3 \text{ γίνεται : } f(x) = \begin{cases} x - 1 + 3, x \geq 1 \\ -(x - 1) + 3, x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x + 2, x \geq 1 \\ -x + 4, x < 1 \end{cases}$$

Θα εξετάσω πρώτα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + 4) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3$$

$f(1) = 3$ Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Θα εξετάσω τώρα αν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x + 4 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1)}{x - 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

Άρα η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : Καθορισμός παραμέτρων ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Βρίσκουμε αρχικά τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων (π.χ. α, β) ώστε η f να είναι συνεχής στο x_0 (1). Έπειτα βρίσκουμε τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1$,

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$ και ζητάμε να ισχύει $l_1 = l_2$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προσδιορίζουμε τις παραμέτρους α, β .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

8) Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α και β ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ 2\alpha x + 2\beta - 4, & 1 < x \end{cases} \text{ να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο } x_0 = 1.$$

Λύση :

• Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Δηλαδή ισχύει : $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$f(1) = 1 + \alpha + \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + \alpha x + \beta) = 1 + \alpha + \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2\alpha x + 2\beta - 4) = 2\alpha + 2\beta - 4$$

$$\text{Άρα } 1 + \alpha + \beta = 2\alpha + 2\beta - 4 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 - \alpha \quad (1)$$

• Αφού η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + \alpha x + \beta - (1 + \alpha + \beta)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + \alpha x + \beta - 1 - \alpha - \beta}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + \alpha x - 1 - \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1 + \alpha x - \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1) + \alpha(x - 1)}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1 + \alpha)}{x - 1} = 2 + \alpha \quad (2)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\alpha x + 2\beta - 4 - (1 + \alpha + \beta)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\alpha x + 2\beta - 4 - 1 - \alpha - \beta}{x - 1} =$$

$$\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\alpha x + 2(5 - \alpha) - 5 - \alpha - 5 + \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\alpha x + 10 - 2\alpha - 10}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\alpha(x - 1)}{x - 1} = 2\alpha \quad (3)$$

Από (2) και (3) $2 + \alpha = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 2$ και λόγω της (1) $\beta = 3$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : Προσδιορισμός $f'(x_0)$ από ανισοτική σχέση (κριτήριο παρεμβολής)

Αρχικά θέτουμε όπου x το x_0 και βρίσκουμε την τιμή $f(x_0)$. Έπειτα μορφοποιούμε την ανισότητα ώστε να έχουμε στη μέση $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και τέλος εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε το $f'(x_0)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $2x^2 + 5x + 3 \leq f(x) \leq 3x^2 + 3x + 4$ να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση :

Για $x = 1$ η σχέση γίνεται : $2 + 5 + 3 \leq f(1) \leq 3 + 3 + 4 \Leftrightarrow 10 \leq f(1) \leq 10$. Άρα $f(1) = 10$. Η

παράγωγος στη θέση $x_0 = 1$ είναι : $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1}$

Άρα έχω : $2x^2 + 5x + 3 \leq f(x) \leq 3x^2 + 3x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 \leq f(x) - 10 \leq 3x^2 + 3x - 6$ (1).

• Για $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$: $\frac{2x^2 + 5x - 7}{x - 1} \leq \frac{f(x) - 10}{x - 1} \leq \frac{3x^2 + 3x - 6}{x - 1}$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(2x + 7)}{x - 1} = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + 3x - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(3x + 6)}{x - 1} = 9 \text{ άρα από κριτήριο παρεμβολής έχω :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - 10}{x - 1} = 9 \quad (2)$$

• Για $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$: $\frac{2x^2 + 5x - 7}{x - 1} \geq \frac{f(x) - 10}{x - 1} \geq \frac{3x^2 + 3x - 6}{x - 1}$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(2x + 7)}{x - 1} = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 + 3x - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(3x + 6)}{x - 1} = 9 \text{ άρα από κριτήριο παρεμβολής έχω :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - 10}{x - 1} = 9 \quad (3). \text{ Άρα από (2) και (3) ισχύει : } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} = 9.$$

10) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$ και ισχύει $f(0) = g(0)$ και $f(x) \geq g(x) + \sin x - 1 + 5x$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι : $f'(0) = g'(0) + 5$.

Λύση :

Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$, επομένως :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ και } g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}.$$

Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) $\Leftrightarrow f(x) - f(0) \geq g(x) - g(0) + \sin x - 1 + 5x$ (2).

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

• Αν $x > 0$ (κοντά στο 0^+), $(2) \Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} \geq \frac{g(x)-g(0)}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} + 5$

Άρα : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(x)-g(0)}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} + 5 \right) \Rightarrow f'(0) \geq g'(0) + 5 \quad (3)$

• Αν $x < 0$ (κοντά στο 0^-), $(2) \Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq \frac{g(x)-g(0)}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} + 5$

Άρα : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{g(x)-g(0)}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} + 5 \right) \Rightarrow f'(0) \leq g'(0) + 5 \quad (4)$

Από (3) και (4) $f'(0) = g'(0) + 5$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : Προσδιορισμός ορίου από $f'(x_0)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(2)=1$ και $f'(2)=-3$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-x+1}{x^2-2x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x)-f(x)}{x^2-4}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)-2}{x-2}$

iv.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[xf\left(\frac{2x+1}{x}\right) - x \right]$

Λύση :

Έχουμε : $f'(2) = -3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = -3, \quad (1)$

i. Έστω $g(x) = \frac{f(x)-1}{x-2}, x \neq 2$, με $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \stackrel{(1)}{=} -3$.

Επομένως : $f(x) = (x-2)g(x) + 1$ κοντά στο 2.

Άρα : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)g(x)+1-x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)g(x)-(x-2)}{x^2-2x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(g(x)-1)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{x} = \frac{-3-1}{2} = -2.$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x)-f(x)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(f(x)-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} \cdot \frac{f(x)}{x+2} \stackrel{(1)}{=} -3 \cdot \frac{f(2)}{2+2} = -\frac{3}{4},$

καθώς η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, άρα η f είναι συνεχής στο 2, δηλαδή

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 1.$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)-x+x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(f(x)-1)+x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[x \cdot \frac{(f(x)-1)}{x-2} + 1 \right] \stackrel{(1)}{=}$
 $= 2 \cdot (-3) + 1 = -5.$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

iv. Θέτω $u = \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow u = 2 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = u - 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{u-2}$, είναι : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$,
άρα : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x f\left(\frac{2x+1}{x}\right) - x \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{u-2} f(u) - \frac{1}{u-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(u) - 1}{u-2} \stackrel{(1)}{=} -3$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : Προσδιορισμός $f'(x_0)$ από γνωστό όριο

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x} - 1} = 4$.

i. Να βρείτε το $f(1)$ ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να βρείτε το $f'(1)$.

Λύση:

i. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ άρα : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ (1)

Θέτω $g(x) = \frac{f(x) - x}{\sqrt{x} - 1}$ κοντά στο 1, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4$

Έχω : $g(x) = \frac{f(x) - x}{\sqrt{x} - 1} \Leftrightarrow g(x)(\sqrt{x} - 1) = f(x) - x \Leftrightarrow f(x) = g(x)(\sqrt{x} - 1) + x$ κοντά στο 1.

Άρα : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)(\sqrt{x} - 1) + x] = 1$, άρα από (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow f(1) = 1$.

ii. Για να δείξω ότι η f είναι παρ/μη στο $x_0 = 1$, αρκεί να δείξω ότι το όριο

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Έχω : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(\sqrt{x} - 1) + x - 1}{x - 1} =$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{g(x)(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{x - 1}{x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{g(x)(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} + 1 \right] =$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{g(x)}{(\sqrt{x} + 1)} + 1 \right] = \frac{4}{2} + 1 = 3 \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι παρ/μη στο $x_0 = 1$ και $f'(1) = 3$.

13) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ να βρείτε το $f'(1)$.

Λύση: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ άρα είναι και συνεχής στο $x_0 = 1$ δηλαδή :

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ (1). Θέτω $g(x) = \frac{f(x) - x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1}$ κοντά στο 1 με $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{2}$.

Λύνοντας ως προς $f(x)$ έχω :

$f(x) - x^2 + 3x - 3 = g(x)(x^2 - 1) \Leftrightarrow f(x) = g(x)(x^2 - 1) + x^2 - 3x + 3$ κοντά στο 1 άρα :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)(x^2 - 1) + x^2 - 3x + 3] = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 - 3 + 3 = 1 \text{ άρα από (1) :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow f(1) = 1$$

Επίσης : η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ άρα : $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}. \text{ Το όριο που δίνεται γράφεται : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1 - x^2 + 3x - 2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1 - (x^2 - 3x + 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x) - 1}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} - \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)(x + 1)} \right] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x) - 1}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} - \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} \right] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(1) \cdot \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(1) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(1) = 0$$

14) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 5$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(4x + 1) - 2}{x - 1} = 8. \text{ Να δείξετε ότι } f(5) = 2 \text{ και ότι η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 5$$

με $f'(5) = 2$.

Λύση:

$$\text{Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(4x + 1) - 2}{x - 1} = 8 \quad \begin{matrix} \text{Θέτω} \\ 4x + 1 = u \Leftrightarrow x = \frac{u - 1}{4} \end{matrix} \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ u \rightarrow 5}} \frac{f(u) - 2}{\frac{u - 1}{4} - 1} = 8 \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 5} \frac{f(u) - 2}{\frac{u - 5}{4}} = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \lim_{u \rightarrow 5} \frac{f(u) - 2}{u - 5} = 8 \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 5} \frac{f(u) - 2}{u - 5} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 2}{x - 5} = 2 \quad (1)$$

Έστω : $g(x) = \frac{f(x) - 2}{x - 5}$, $x \neq 5$ και $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 2$. Είναι : $f(x) = (x - 5)g(x) + 2$ κοντά στο 5

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$, άρα $f(5) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} [(x - 5)g(x) + 2] = 2$

$$\text{Έτσι (1)} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 2}{x - 5} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = 2 \Leftrightarrow f'(5) = 2.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : Ισοδύναμος ορισμός για το $f'(x_0)$

Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 .

$$\text{Δηλ. } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15) (Άσκηση 2 σελ. 220 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου κατεύθυνσης)

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f(1+h) = 2 + 3h + 3h^2 + h^3$, για κάθε $h \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι : i. $f(1) = 2$ ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ότι $f'(1) = 3$.

Λύση :

i. Για να βρω το $f(1)$, στη σχέση $f(1+h) = 2 + 3h + 3h^2 + h^3$, θα βάλω όπου $h = 0$ και έχω : $f(1) = 2$

ii. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ αρκεί το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός. Έχω $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + 3h + 3h^2 + h^3 - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3 + 3h + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3 \in \mathbb{R}. \text{ Άρα η } f \text{ παρ/μη στο}$$

$$x_0 = 1 \text{ με } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3.$$

16) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 να δείξετε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 2h)}{h} = 3f'(x_0).$$

Λύση :

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 άρα $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$$\text{Έχουμε : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - 2h)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) - (-2)f'(x_0) = 3f'(x_0).$$

$$(*) \text{ είναι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} \stackrel{\text{θέτω}}{-2h=u \Leftrightarrow h=-\frac{u}{2}} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{-\frac{u}{2}} = -2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} = -2f'(x_0).$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : Παράγωγος και συναρτησιακές σχέσεις.**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**

17) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x) + 3xf(x) = x^3 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε : i. το $f(0)$ και ii. το $f'(0)$.

Λύση :

i. Στη σχέση $f^3(x) + 3xf(x) = x^3 - 1$ θέτω για $x = 0$ και έχω : $f^3(0) = -1 \Leftrightarrow f(0) = -1$

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ άρα $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x}$

$$\text{Όμως : } f^3(x) + 3xf(x) = x^3 - 1 \Leftrightarrow f^3(x) + 1 = x^3 - 3xf(x) \Leftrightarrow$$

$$(f(x) + 1)(f^2(x) - f(x) + 1) = x^3 - 3xf(x) \Leftrightarrow f(x) + 1 = \frac{x(x^2 - 3f(x))}{f^2(x) - f(x) + 1}$$

καθώς η παράσταση $f^2(x) - f(x) + 1$ είναι τριώνυμο ως προς $f(x)$ με $\Delta = -3 < 0$ άρα $f^2(x) - f(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x(x^2 - 3f(x))}{f^2(x) - f(x) + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3f(x)}{f^2(x) - f(x) + 1} = \frac{0 - 3f(0)}{f^2(0) - f(0) + 1} = 1$$

καθώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ άρα είναι και συνεχής στο 0, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -1$.

18) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x) + x^2 f(x) = 2x^2 \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε : i. το $f(0)$ και ii. το $f'(0)$.

Λύση :

i. Στη σχέση $f^3(x) + x^2 f(x) = 2x^2 \eta \mu x$ θέτω για $x = 0$ και έχω : $f^3(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

ii. Είναι $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$. Διαιρώ τη σχέση :

$$f^3(x) + x^2 f(x) = 2x^2 \eta \mu x \quad \text{με } x^3 \neq 0 \quad \text{και έχουμε : } \left(\frac{f(x)}{x} \right)^3 + \frac{f(x)}{x} = 2 \frac{\eta \mu x}{x} \quad \text{άρα}$$

$$\text{παίρνοντας όριο έχουμε : } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x} \right)^3 + \frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \frac{\eta \mu x}{x} \right) \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1.$$

19) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) + 1 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι : i. η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και ii. ότι $f'(1) = 2$.

Λύση :

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f^3(x) + f(x) + 1 = x^2 \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) = x^2 - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) + 1} \quad (1)$$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$\text{Είναι : } |f(x)| = \left| \frac{x^2 - 1}{f^2(x) + 1} \right| = \frac{|x^2 - 1|}{f^2(x) + 1} \leq \frac{|x^2 - 1|}{1} = |x^2 - 1| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Δηλ. } |f(x)| \leq |x^2 - 1| \Leftrightarrow -|x^2 - 1| \leq f(x) \leq |x^2 - 1|$$

$$\text{Έτσι : } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} (-|x^2 - 1|) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (|x^2 - 1|) = 0 \end{array} \right\} \text{ από κριτήριο παρεμβολής : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$$

$$\text{Επίσης : } f(1) = \frac{1^2 - 1}{f^2(1) + 1} = 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 - 1}{f^2(x) + 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(f^2(x) + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{f^2(x) + 1} = \frac{1 + 1}{f^2(1) + 1} = 2. \quad (\text{καθώς } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0) \end{aligned}$$

20) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \alpha$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ (1) με $f(0) \neq 0$, να δείξετε ότι $f'(x_0) = \alpha f(x_0)$ για κάθε $x_0 \neq 0$.

Λύση :

Για $x = y = 0$ είναι : (1) $\Leftrightarrow f(0) = f^2(0) \Leftrightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$ καθώς $f(0) \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης : } f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) \cdot f(h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) \cdot (f(h) - 1)}{h} = \\ &= f(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f(x_0) \cdot f'(0) = f(x_0) \cdot \alpha. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

21) Αν $f(x) = 3x - 2$, να βρείτε το $f'(2)$.

22) Αν $f(x) = x^2 + x$ να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

23) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x - 1|$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$. (Υποδ. για να βρούμε την παράγωγο σε ένα σημείο x_0 μιας συνάρτησης f που περιέχει απόλυτα, πρώτα βγάζουμε τα απόλυτα και η συνάρτηση γίνεται πολλαπλού τύπου)

24) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x - 2|$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$.

25) Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 , όταν

i. $f(x) = x|x|$, $x_0 = 0$

ii. $f(x) = |x^2 - 3x|$, $x_0 = 1$

iii. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

26) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = 2 - x + \eta\mu |x|$ στο σημείο $x_0 = 0$.

27) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x < 0 \\ x^5 + 15, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. (Υποδ. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0 . Αν όμως δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη)

28) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x < 0 \\ 2x + \eta\mu x, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

29) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x < 0 \\ x - \eta\mu x, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

30) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x > 0 \\ \eta\mu x + (\beta - 2)x + 2\alpha - 2, & x \leq 0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

31) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 7$ και $f(7) = 10$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$.

32) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

33) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot (\eta\mu x)^{2015}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

34) Αν μια συνάρτηση είναι f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 7$ να αποδείξετε :

i. $f(1) = 0$

ii. $f'(1) = 7$

35) Αν μια συνάρτηση είναι f είναι συνεχής και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^2 - 7x}{x^2 - 2x} = 2$

i. Να βρείτε το $f(0)$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε το $f'(0)$.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2}$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

36) Αν μια συνάρτηση είναι f είναι συνεχής και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu 3x}{x^2 - x} = 2$.

- i. Να βρείτε το $f(0)$
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε το $f'(0)$.
- iii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \eta\mu x \cdot \eta\mu 5x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$.

37) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$.

- i. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.
- ii. Να δείξετε ότι $f'(0) = 1$.
- iii. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$. (Πανελλήνιες 2005)

38) Αν για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $x^2 + 3x \leq f(x) \leq 2x^2 - x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε το $f'(2)$.

39) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\eta\mu^2 x - x^4 \leq xf(x) \leq \eta\mu^2 x + x^4 \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

- i. $f(0) = 0$
- ii. $f'(0) = 1$.

40) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$. Αν $f(3) = 5$ και

$$f'(3) = 2 \text{ να υπολογίσετε το όριο: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x) - xf(3)}{x - 3}.$$

41) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 1 και $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(2x - 5) - x}{x - 3} = 7$

- i. να αποδείξετε ότι $f(1) = 3$
- ii. να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 4$
- iii. να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 9}{\sqrt{x} - 1}$

42) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(0) = 5$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(0)}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x}$

43) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(0) = 2$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(7x) - f(3x)}{x}$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

44) Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε

i. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = -f'(x_0)$

ii. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = 2f'(x_0)$.

45) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 2, για την οποία ισχύει : $f^3(x) + 2f(x) + 4 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε : i. το $f(2)$ και ii. το $f'(2)$.

46) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x) + 8x \cdot \eta\mu x \cdot f(x) = x \cdot \eta\mu^2 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε : i. το $f(0)$ και ii. το $f'(0)$

47) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy - 2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 4$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

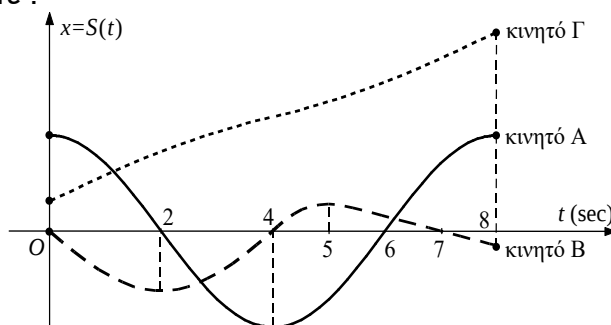
48) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 1. Αν επιπλέον η συνάρτηση : $g(x) = \begin{cases} f^3(x) + 3f(x), & x \leq 1 \\ f(x) - 3, & x > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1, τότε να βρείτε :

i. τα $f(1)$ και $f'(1)$

ii. το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - x^2 + 2}{x - 1}$.

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xg(x) + 2x^2 - 1 = 2x^3 - 6x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

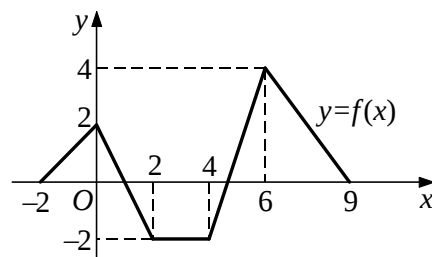
49) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως τριών κινητών που κινήθηκαν πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0sec έως 8sec. Να βρείτε :



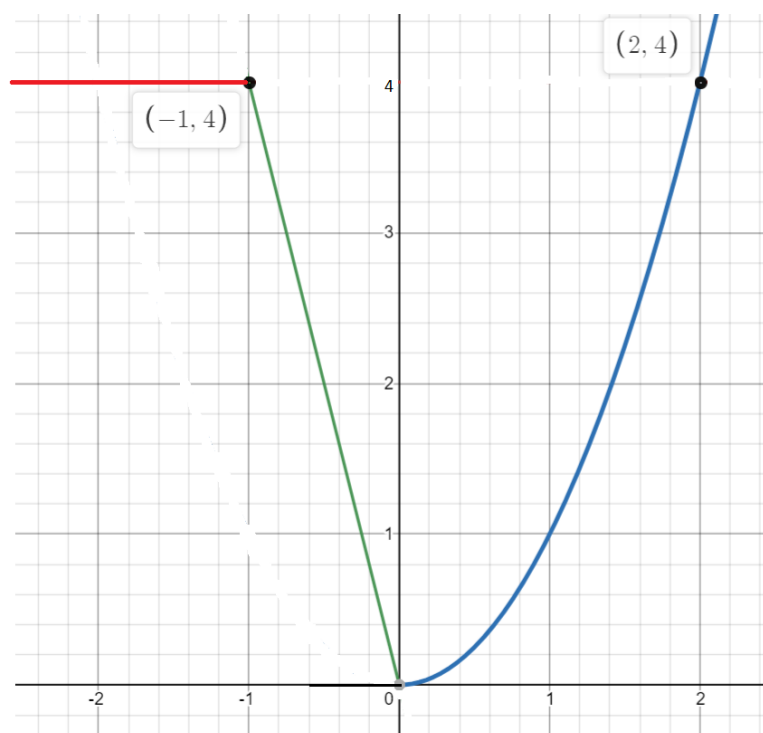
- Ποιο κινητό ξεκίνησε από την αρχή του άξονα κίνησης;
- Ποιο κινητό κινήθηκε μόνο προς τα δεξιά;
- Ποιο κινητό άλλαξε φορά κίνησης τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ sec}$, ποιο τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ sec}$ και ποιο τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ sec}$;
- Ποιο κινητό κινήθηκε προς τα αριστερά σε όλο το χρονικό διάστημα από 0sec έως 4sec;
- Ποιο κινητό τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης;
- Ποιο κινητό διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα;

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

50) Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος.



51) Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



- i. Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ -4x, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.
- ii. Να βρείτε την $f'(x)$ και να τη σχεδιάσετε.
- iii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1-x)}{x}$.
- iv. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\sqrt{x^2 + 1} - 3x \right) \cdot \left(f\left(1 + \frac{2}{x}\right) - 1 \right) \right]$.
- v. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε :
- $$5f(x_0) = 2f\left(\frac{1}{e}\right) + 3f\left(\frac{1}{\pi}\right)$$

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.1

ΘΕΜΑ 2 #24756

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 2$. (Μονάδες 9)

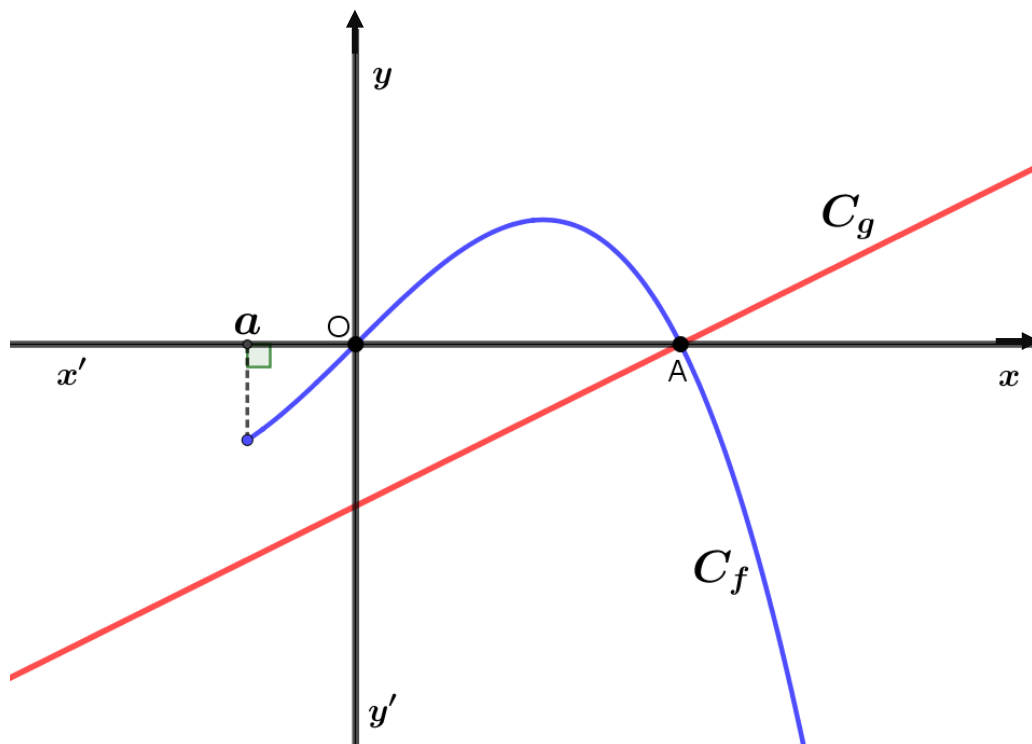
β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 #25234

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και την συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Γνωρίζουμε ότι:

- οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1, 0)$.
- η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ εκτός από τα σημεία O και A .



α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{g(x)}$. (Μονάδες 8)

β) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{f(x)}$. (Μονάδες 9)