

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

«ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ»



Επιμέλεια :
Παλαιολόγου Πάυλος
Μαθηματικός

1.1 ΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ

A. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - x - 1$

- Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$ και $f(h+1)$
- Να βρείτε τις τιμές του x ώστε $f(x) = 0$

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

- Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$ και $f(-2x)$
- Να βρείτε τις τιμές του x ώστε $f(x) < 2$

3) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln^2 x}$ με $x > 0$. Να δείξετε ότι $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2$

- Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$, $f(-\frac{2}{3})$, $f(h-1)$
- Για ποιες τιμές του x είναι $f(x) < 0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	$P(x) \geq 0$
$f(x) = \ln(P(x))$	$P(x) > 0$
$f(x) = \varepsilon\phi(P(x))$	$P(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \sigma\phi(P(x))$	$P(x) \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$
$f(x) = (P(x))^{Q(x)}$	$P(x) > 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = x^2 - 3x + 12$

ii. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- iii. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2}$
 iv. $f(x) = 2x + \sqrt{6-x}$
 v. $f(x) = \frac{3x+5}{x-3} + \sqrt{x-2}$
 vi. $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{2-x}$
 vii. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
 viii. $f(x) = \ln(1-e^x)$
 ix. $f(x) = (2-x)^{\sqrt{x-1}}$
 x. $f(x) = \ln(\pi^2 - x^2) - \varepsilon \phi x + x^{2016}$

Λύση :

- i. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$
 ii. Πρέπει : $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
 iii. Πρέπει : $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1,2\}$
 iv. Πρέπει : $6-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$. Άρα $D_f = (-\infty, 6]$
 v. Πρέπει : $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Άρα $D_f = [2,3) \cup (3, +\infty)$
 vi. Πρέπει : $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1,2]$. Άρα $D_f = [1,2]$
 vii. Πρέπει : $x \neq 0$ (1) και $1-x^2 \geq 0$ (2)
 Έχω $1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1]$ (2)

Από (1) & (2) $D_f = [-1,0) \cup (0,1]$.

- viii. Πρέπει : $1-e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$. Άρα $D_f = (-\infty, 0)$
 ix. Πρέπει : $\begin{cases} 2-x > 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1,2)$ Άρα $D_f = [1,2)$
 x. Πρέπει :

- $\pi^2 - x^2 > 0$, είναι $\pi^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \pi$

x	$-\infty$	$-\pi$		π	$+\infty$
$\pi^2 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $\pi^2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi, \pi)$

- $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Συναληθευοντας τους παραπάνω περιορισμούς έχω :

$$x \in (-\pi, \pi) \Leftrightarrow -\pi < x < \pi \Leftrightarrow -\pi < \kappa\pi + \frac{\pi}{2} < \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} < \kappa\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < \kappa < \frac{1}{2}$$

Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$ άρα $\kappa = -1$ ή $\kappa = 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$\text{Για } \kappa = -1 \text{ είναι } x \neq -\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Για } \kappa = 0 \text{ είναι } x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Άρα } D_f = \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \frac{x}{x+2}$
- ii. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$
- iii. $f(x) = \frac{3x-51}{x^2-5x+6}$
- iv. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2x-3}$
- v. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-x-2} + \frac{1}{x-3}$
- vi. $f(x) = \frac{2x+1}{x^3-8} + \frac{1}{x^3+1}$
- vii. $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$
- viii. $f(x) = \frac{e^x + x^5}{5 - e^x}$

7) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \sqrt{x-5}$
- ii. $f(x) = \sqrt{2-3x}$
- iii. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
- iv. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$
- v. $f(x) = \sqrt{x^2-3x-4}$
- vi. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x-1}{x}}$
- vii. $f(x) = \sqrt{1-e^x}$
- viii. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

8) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \ln(x-1)$
- ii. $f(x) = \ln(2-x^2)$
- iii. $f(x) = \ln(-x^2+3x+10)$
- iv. $f(x) = \ln(4-x^2)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- v. $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-5}\right)$
vi. $f(x) = \ln(e^x - 1)$
vii. $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{1-|x|}$
viii. $f(x) = \frac{x-1}{\ln^2 x - \ln x}$
ix. $f(x) = \frac{x-1}{\sin 2x - 1}$
x. $f(x) = \frac{7-x}{|2x-1|-5}$
xi. $f(x) = \sqrt{|x-3|-5} + \sqrt{7-|x-4|}$

9) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = (x^2 - 25)^{x^2+e^x}$
ii. $f(x) = (16 - x^2)^{3x^5 + \ln x}$
iii. $f(x) = (e^x - 1)^{x^{2015} + \sqrt{2-x}}$
iv. $f(x) = (9 - x^2)^{\sqrt{|x|-1}}$
v. $f(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2} + \varepsilon\phi\kappa$
vi. $f(x) = \ln(2\pi x - x^2) - \varepsilon\phi\kappa$

10) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$
ii. $f(x) = \frac{\sqrt{|x|-3}}{x^2+4}$
iii. $f(x) = \frac{\ln(x+5)}{\sqrt{2-x}}$
iv. $f(x) = \frac{x-1}{\ln^2 x - \ln x}$
v. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\ln(x-1)}$
vi. $f(x) = \frac{\ln(x+5)}{x^2-3x-4}$
vii. $f(x) = \frac{\ln(4-x)}{\sqrt{|x|-1}}$
viii. $f(x) = \frac{x^2-3x}{\sqrt{16-x^2}}$
ix. $f(x) = \frac{\ln(x^2-9)}{x-7}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

x. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{\ln(x+2)}$

xi. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x^2 - 4}$

xii. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(x+3)}$

xiii. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{\ln(e^x - 1)}$

xiv. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1} + \frac{x^2}{e^x + 1}$

11) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + x - 1$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x) = \sqrt{-f(x)}$

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + \lambda}{x^2 - 4\lambda x + \lambda^2 + 2\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ , αν είναι γνωστό ότι η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{x-1}, & x \neq 1 \\ \alpha^2 - 3, & x = 1 \end{cases}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να υπολογίσετε το α ώστε $f(-1) = f(1)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Αν είναι $A \cap B \neq \emptyset$, τότε με πεδίο ορισμού το $A \cap B$ ορίζουμε τις συναρτήσεις :

- **Άθροισμα**, με $D_{f+g} = A \cap B$ και τύπο $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Διαφορά**, με $D_{f-g} = A \cap B$ και τύπο $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- **Γινόμενο**, με $D_{f \cdot g} = A \cap B$ και τύπο $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Τέλος με πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B - \{x / g(x) = 0\}$ ορίζουμε τη συνάρτηση
Πηλίκο, με $D_{\frac{f}{g}} = A \cap B - \{x / g(x) = 0\}$ και τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15) Αν $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \ln(2-x)$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

Λύση :

Αρχικά πρέπει να βρούμε τα πεδία ορισμού των f, g .

Για την $f(x) = \sqrt{x-1}$ πρέπει $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ άρα $D_f = [1, +\infty)$

Για τη $g(x) = \ln(2-x)$ πρέπει $2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$ άρα $D_g = (-\infty, 2)$

- $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [1, 2)$ και $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x-1} + \ln(2-x)$
- $D_{f-g} = D_f \cap D_g = [1, 2)$ και $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-1} - \ln(2-x)$
- $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [1, 2)$ και $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x-1} \cdot \ln(2-x)$
- Για την $\frac{f}{g}$ πρέπει επιπλέον $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(2-x) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(2-x) \neq \ln 1 \Leftrightarrow 2-x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$

Άρα $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x / g(x) = 0\} = (1, 2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

16) Αν $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = x - x^2$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

17) Αν $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x}$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

18) Αν $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x+1}$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

19) Αν $f(x) = \ln(x^2-1)$ και $g(x) = \ln x$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

20) Αν $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{4-x}}$ και $g(x) = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{4-x}}$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

21) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x-1$ και $g(x) = e^x - 1$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων $f, g, f \cdot g, \frac{f}{g}$.
- Να λύσετε την εξίσωση $(f \cdot g)(x) = 0$
- Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{f}{g}\right)(x) > 0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f (συμβ. C_f) ισχύουν τα παρακάτω :

- Για όλα τα σημεία $M(x, y)$ που ανήκουν στη C_f ισχύει $y = f(x)$. Δηλ. $M(x, f(x))$. Πιο συγκεκριμένα το σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στη C_f , αν και μόνο αν $f(x_0) = y_0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) < 0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
- ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΕΣ
 - ❖ Η C_f τέμνει τον $x'x$ σε σημεία της της μορφής $M(x_0, 0)$, οπότε για να τα βρούμε λύνουμε την εξίσωση $y = f(x) = 0$
 - ❖ Η C_f τέμνει τον $y'y$ σε σημεία της της μορφής $M(0, y_0)$, οπότε για να τα βρούμε, βάζουμε όπου x το 0 δηλ. υπολογίζουμε το $f(0)$
- Για να βρούμε κοινά σημεία C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

22) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha - 4$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3, 5)$, να βρείτε :

- i. τον αριθμό α
- ii. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- iii. τα σημεία όπου η C_f βρίσκεται κάτω από το άξονα $x'x$
- iv. τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = -4x + 1$
- v. τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της

$$h(x) = \frac{2x^2 - |x - 3|}{2}.$$

Λύση :

- i. $f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha - 4$, με $A_f = \mathbb{R}$.
Η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3, 5)$ άρα $f(-3) = 5 \Leftrightarrow 9 - 3\alpha + \alpha - 4 = 5 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$, δηλ. $f(x) = x^2 - 4$.
- ii. Η C_f τέμνει τον $x'x$ για $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ άρα στα σημεία $A(2, 0)$ και $B(-2, 0)$
Η C_f τέμνει τον $y'y$ για $x = 0$ άρα $f(0) = -4$ δηλ. στο σημείο $\Gamma(0, -4)$.
- iii. Η C_f βρίσκεται κάτω από το άξονα $x'x$ άρα $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0$

Είναι : $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

iv. Για να βρω τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = -4x + 1$ (δηλ. τη συνάρτηση $g(x) = -4x + 1$), θα λύσω την εξίσωση: $f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4 = -4x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -5$, άρα στα σημεία $\Delta(1, f(1)) \rightarrow \Delta(1, -3)$ και $E(-5, f(-5)) \rightarrow E(-5, 21)$.

v. Για να βρω τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της $h(x)$, θα λύσω την ανίσωση: $f(x) > h(x) \Leftrightarrow x^2 - 4 > \frac{2x^2 - |x - 3|}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 8 > 2x^2 - |x - 3| \Leftrightarrow |x - 3| > 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 > 8 \Leftrightarrow x > 11 \\ \text{ή} \\ x - 3 < -8 \Leftrightarrow x < -5 \end{cases}$ δηλ. $x \in (-\infty, -5) \cup (11, +\infty)$.

23) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν :

i. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ii. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ iii. $f(x) = e^x - 1$

Λύση :

i. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0$

Έχω $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, \text{ ή } x = 3$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+

Αρα επειδή θέλω $x^2 - 4x + 3 > 0$ τότε $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

ii. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0$

Έχω $(1+x)(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	0	+	0	-

Αρα επειδή θέλω $(1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

iii. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow$

$e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ άρα $x \in (0, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

24) Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2\alpha x + \beta$ να διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 3)$ και $B(1, 7)$.

25) Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ να διέρχεται από τα σημεία $A(0, 3)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(-2, -1)$.

26) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες.

i. $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 3x + 9}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- ii. $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$
- iii. $f(x) = 2\eta\mu x - \sqrt{3}$, $x \in [0, 2\pi]$
- iv. $f(x) = e^x - 1$

27) Να βρεθεί για ποιες τιμές του x , η C_f βρίσκεται πάνω από τον x' .

- i. $f(x) = e^{x^2 - 5x + 6} - 1$
- ii. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
- iii. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$

28) Να βρεθεί για ποιες τιμές του x , η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .

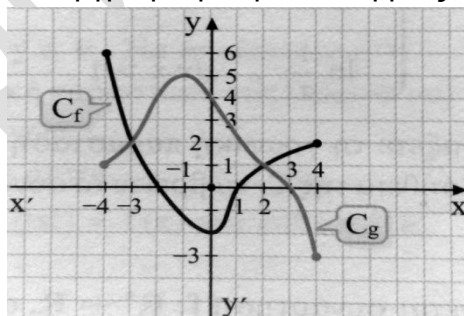
- i. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 10$ και $g(x) = x^2 + 3x + 4$
- ii. $f(x) = \sqrt{x-3}$ και $g(x) = x - 5$
- iii. $f(x) = e^{x^2 - 4x + 8}$ και $g(x) = e^{x+2}$

29) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 2$ και η ευθεία $(\varepsilon) : 6x - y - 4 = 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της (ε)

30) Έστω ότι η συνάρτηση $f(x) = \kappa \ln(x+1) + \lambda$, για την οποία ισχύει ότι η C_f τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $e^2 - 1$ και τον άξονα y' στο 2.

- i. Να βρείτε τα κ, λ
- ii. Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τεταγμένη 3.

31) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των f, g
- ii. Να βρείτε τις τιμές $f(g(0))$ και $g(f(0))$.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$
- v. Να λύσετε την ανίσωση $g(x) \leq 0$

32) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^x + 2x e^x$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- iii. Τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον x' .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για να υπολογίσουμε ένα όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αρχικά θέτω όπου x το x_0

Περίπτωση 1^η Αν το αποτέλεσμα είναι αριθμός $l \in \mathbb{R}$ τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Περίπτωση 2^η Αν μετά την αντικατάσταση προκύψει απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, τότε παραγοντοποιώ αριθμητή και παρονομαστή με σκοπό να απλοποιηθεί ο παράγοντας της μορφής $x - x_0$

Περίπτωση 3^η Αν έχουμε όριο άρρητης συνάρτησης (που περιέχει ρίζες) και προκύπτει η απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$, τότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του όρου ή των όρων που περιέχει ρίζα

Περίπτωση 4^η Αν προκύψει $\frac{\alpha \pm \beta}{0}$ τότε κάνω ομώνυμα τα κλάσματα και προκύπτει όριο της μορφής $\frac{0}{0}$, οπότε και εργάζομαι όπως παραπάνω.

ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ :

- **Κοινός παράγοντας :** Βγάζουμε κοινό παράγοντα από όλους τους όρους ή κατά ομάδες.
- **Ταυτότητες :** Συνήθως χρησιμοποιούμε τις Ταυτότητες

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$
- **Τριώνυμο :**

Αν $\Delta > 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$

Αν $\Delta = 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)^2$

Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.
- **Σχήμα Horner :** Δόκιμη κάνω πρώτα με το x_0

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 1^η

33) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^5 - 6x + 2013)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 9}$ iii. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 7x^2 + 28)$

Λύση :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^5 - 6x + 2013) = 1^5 - 6 \cdot 1 + 2013 = 1 - 6 + 2013 = 2008$

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{4^2 + 9} = 5$

iii. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 7x^2 + 28) = (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + 28 = -8 - 28 + 28 = -8$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 2^η

34) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x}$

Λύση :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overset{0}{x^4} - \overset{0}{16}}{\overset{0}{x^3} - \overset{0}{8}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2)^2 - 4^2}{x^3 - 2^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} =$
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x^2 + 4)}{(x^2 + 2x + 4)} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overset{0}{2x^2} - \overset{0}{3x} + \overset{0}{1}}{\overset{0}{x^2} - \overset{0}{1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x+1)} = \frac{1}{2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overset{0}{1} - \overset{0}{\frac{1}{x}}}{\overset{0}{1} - \overset{0}{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1)}{x(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x+1)} = \frac{1}{2}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{0}{(x+3)^3} - \overset{0}{27}}{\overset{0}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3-3)[(x+3)^2 + 3(x+3) + 3^2]}{x} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + 6x + 9 + 3x + 9 + 9)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x + 9 + 3x + 9 + 9}{1} = 27$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 3^η

35) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x^2+5} - 3}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$

Λύση :

i. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})}{(9 - x)(3 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - x}{(9 - x)(3 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{3 + \sqrt{x}} = \frac{1}{6}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}^2}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + x^2}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x^2+5} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)(\sqrt{x^2+5} + 3)}{(\sqrt{x^2+5} - 3)(\sqrt{x^2+5} + 3)(\sqrt{x+2} + 2)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2-4)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2+5-9)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x-1)(x-4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x-1)(x-4)(\sqrt{x} + 2)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{12}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 4^η

36) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right)$

Λύση :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} - \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+2x+2-3x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

37) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 7x + 2)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 9}$

iii. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 3x^2 - 5)$

38) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} (2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow e} [\ln(x^2 - ex + 1)]$

iii. $\lim_{x \rightarrow \pi} (\epsilon\phi x + \sigma\upsilon\nu^2 x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\eta\mu^2 x - 5\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$

v. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(1 + \sigma\upsilon\nu x - \frac{x}{\eta\mu x} \right)$

vi. $\lim_{x \rightarrow 1} (2e^x + \ln x)$

vii. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} \frac{\ln x + 1}{e^x + 1}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x^2 + 1) - e^x]$

39) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 10x + 24}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 4}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 6x + 5}$

x. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 + 4x - 12}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- xi. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 2x - 2}{3x^2 + 2x - 5}$
xii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1}$
xiii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - x}$
xiv. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^3 - 9x}$

40) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2 - 1}$
ii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x + 1}$
iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 5x + 6}$
iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$
v. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + 5x - 14}{x^2 + 6x - 16}$
vi. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 10x + 8}{x^2 + x - 6}$
vii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^3 - 8}$
viii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$
ix. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 5x + 6}$

41) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$
ii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$
iii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$
iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x-2}$
v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$
vi. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x-3}$
vii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{1 - \sqrt{x-2}}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

viii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$

42) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{5 - \sqrt{5x}}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{4x - 7}}{x^2 - 4}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x + 3}}{x^2 - 1}$

v. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

vi. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{3x + \sqrt{x^2 + 8}}$

vii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{2 - 2x}}{\sqrt{3x + 7} - 2\sqrt{x + 2}}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\eta\mu x - 2x - \eta\mu x + 2}{x^2 - 1}$

43) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x - 3}{6x^2 - x - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 3} - 2x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x + 3} - \sqrt{3} - 2}{x - 1}$

υποδ. όταν έχω παράσταση της μορφής $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[m]{g(x)} \pm \lambda$, τότε διασπάμε τον αριθμό λ σε δυο αριθμούς (Οι αριθμοί αυτοί είναι αντίθετοι των τιμών που θα προκύψουν από τις $\sqrt[n]{f(x)}$ και $\sqrt[m]{g(x)}$, αν θέσουμε σ' αυτές όπου x το x_0). Στη συνέχεια χωρίζουμε το κλάσμα σε 2, όπου κάθε κλάσμα περιέχει μια ρίζα και ένα αριθμό και τέλος υπολογίζουμε το όριο κάθε κλάσματος πολλαπλασιάζοντας με την κατάλληλη συζυγή παράσταση.

vi. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x + 5} + \sqrt{8 - x} - 5}{x^2 - 1}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

vii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} - 5}{x^2 - 25}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{x}}{x^2 - x}$ υποδ. όταν έχω $\sqrt[3]{f(x)} - \sqrt[3]{g(x)}$, τότε η συζυγής παράσταση είναι

$\sqrt[3]{f(x)}^2 + \sqrt[3]{f(x)} \cdot \sqrt[3]{g(x)} + \sqrt[3]{g(x)}^2$ δηλαδή :

$(\sqrt[3]{f(x)} - \sqrt[3]{g(x)}) \cdot (\sqrt[3]{f(x)}^2 + \sqrt[3]{f(x)} \cdot \sqrt[3]{g(x)} + \sqrt[3]{g(x)}^2) = \sqrt[3]{f(x)}^3 - \sqrt[3]{g(x)}^3 = f(x) - g(x)$

44) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$

ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$. (Πανελλήνιες 2004)

45) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$

46) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{\sqrt{2x+3} - 3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

47) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Να βρείτε :

i. το πεδίο ορισμού της

ii. το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

iii. το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]^2$

48) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 3x^2 - 4x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x-1} - \frac{3}{x^2 - x} \right)$

49) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, αν ισχύει :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\lambda^2 - 3) \cdot x^2 + 15x - 18 - 4\lambda^2}{x - 2} = 3\lambda^2 + 7$

ii. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + (\lambda + 1) \cdot x + 2\lambda - 2}{x + 2} = \lambda^2 - \lambda - 2,$

Γ. ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΤΟ x_0

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της, ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

ΒΗΜΑ 1^ο : Βρίσκουμε το $f(x_0)$

ΒΗΜΑ 2^ο : Υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ χρησιμοποιώντας τον τύπο της f για τον οποίο $x \neq x_0$ και το x ανήκει σε μια γειτονιά του x_0 .

ΒΗΜΑ 3^ο : Τέλος για να είναι η f συνεχής στο x_0 πρέπει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

50) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 - 3x - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 7, & x = 1 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι

συνεχής στο $x_0 = 1$.

Λύση :

- $f(1) = 7$

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 3x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)\left(x + \frac{2}{5}\right)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 5\left(x + \frac{2}{5}\right) = 7$

- Δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 7$ άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

51) Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις :

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ στο $x_0 = 1$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -3, & x = -2 \end{cases}$ στο $x_0 = -2$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}, & x \neq -2 \\ \frac{1}{3}, & x = -2 \end{cases}$ στο $x_0 = -2$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ στο $x_0 = 1$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$v. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x - \ln x^2}{x^2 - 4}, & 0 < x \neq 2 \\ \frac{1}{4}, & x = 2 \end{cases}$$

$$52) \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln^2 x + \ln x - 2}{\ln x - 1}, & x \in (0, e) \cup (e, +\infty) \\ 3, & x = e \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = e$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

$$53) \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \lambda^2 + 5\lambda, & x = 2 \end{cases}. \text{ Να βρείτε την τιμή της}$$

παραμέτρου λ , ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Λύση : Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ άρα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\bullet \quad f(2) = \lambda^2 + 5\lambda \quad (1)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 4) = 6$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda = 6 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \eta, \lambda = -6$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

$$54) \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \lambda x - 3\lambda - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ \frac{\lambda^2 + 4}{2}, & x = 3 \end{cases}. \text{ Να βρείτε την τιμή της}$$

παραμέτρου λ , ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

$$55) \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^3 - \alpha^2 x + \beta x + 2, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τις τιμές}$$

των παραμέτρων α, β , αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$.

$$56) \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ a, & x = -2 \end{cases}. \text{ Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό } a,$$

ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο που αλλάζει ο τύπος της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

57) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - \alpha x + \beta}{x^2 + 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές

των παραμέτρων α, β , αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.

58) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{3x - 2}}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2\alpha + 1, & x = 1 \end{cases}$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό

α , ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο που αλλάζει ο τύπος της.

59) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και η καμπύλη της διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) \cdot (x^2 + x)}{2 - \sqrt{x + 5}}$.

60) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και η καμπύλη της διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$, να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(x) - f(x)}{3x^2 - x - 2}$.

61) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3, -6)$. Αν ισχύει ότι :

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)f(x) + \sqrt{x^2 + 7} - 4}{x^2 - 9} = -\frac{7}{8}$ να αποδείξετε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο 3.

62) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - x + 1}{x^3 - 27}, & -1 \leq x \neq 3 \\ \alpha^2 - 1, & x = 3 \end{cases}$

- Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.
- Να βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

Δ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

63) Ένα κωνικό ποτήρι, ανοικτό στη βάση του κώνου κατασκευάζεται έτσι ώστε το ύψος του h και το μήκος της βάσης του να έχουν άθροισμα 10cm. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του h τον όγκο του ποτηριού.

64) Σε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = 8$ και $B\Gamma = 6$. Αν $\angle A\Delta\Gamma = \theta$, να εκφράσετε ως συνάρτηση του θ .

- την απόσταση των AB και $\Gamma\Delta$.
- το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$.

1.2 –1.3 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ x_0 - ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγισιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 . Δηλ.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 εκφράζει :

- Το **ρυθμό μεταβολής** του $y=f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$.
- Το **συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης** ε της γραφικής παράστασης της f , στο σημεία επαφής $A(x_0, f(x_0))$ δηλαδή $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\phi\omega = f'(x_0)$.
- Την **ταχύτητα** $v(t_0)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του δίνεται από τη συνάρτηση $x(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 . Είναι $v(t_0) = x'(t_0)$
- Την **επιτάχυνση** $a(t_0)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $v(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 . Είναι $a(t_0) = v'(t_0)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) (Άσκηση 1 σελ. 26 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

- i. $f(x) = 3x + 1$ στο $x_0 = 3$
- ii. $f(x) = x^2 + 5$ στο $x_0 = -2$
- iii. $f(x) = x^2 + 2x$ στο $x_0 = 4$

Λύση :

$$\text{i. Έχω : } f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(3+h) + 1 - 10}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 3h - 9}{h} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{ii. Έχω : } f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 + 5 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h-2)^2 - 4}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h + 4 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-4)}{h} = -4 \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

iii. Έχω :

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 + 2(4+h) - 24}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16 + 8h + h^2 + 8 + 2h - 24}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 10h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+10)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+10) = 10 \end{aligned}$$

2) (Άσκηση 2 σελ. 220 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου κατεύθυνσης)

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f(1+h) = 2 + 3h + 3h^2 + h^3$, για κάθε $h \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι : i. $f(1) = 2$ ii. η f είναι παραγωγισιμημη στο 1 και ότι $f'(1) = 3$.

i. Για να βρω το $f(1)$, στη σχέση $f(1+h) = 2 + 3h + 3h^2 + h^3$, θα βάλω όπου $h=0$ και έχω : $f(1) = 2$

ii. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ αρκεί το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ να υπάρχει

και να είναι πραγματικός αριθμός. Έχω $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + 3h + 3h^2 + h^3 - 2}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3 + 3h + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3 \in \mathbb{R}$. Άρα η f παρ/μη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

i. $f(x) = 2x + 5$ στο $x_0 = 2$

ii. $f(x) = x^2 - 3$ στο $x_0 = -3$

iii. $f(x) = x^2 - 5x$ στο $x_0 = 4$

4) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f(3+h) = 2 - 4h + 3h^2 + h^3$, για κάθε $h \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι : i. $f(3) = 2$ ii. η f είναι παραγωγισιμημη στο 3 και ότι $f'(3) = -4$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-3, -36)$.

i. Να βρείτε την τιμή το $\alpha \in \mathbb{R}$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγισιμημη στο $x_0 = 2$ και να βρείτε το $f'(2)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)$	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ $f'(x)$
$f(x) = c, c \in \mathbb{R},$	$f'(x) = (c)' = 0,$
$f(x) = x,$	$f'(x) = (x)' = 1,$
$f(x) = x^v,$	$f'(x) = (x^v)' = v \cdot x^{v-1},$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \eta\mu x$	$f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$f'(x) = (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
$f(x) = \varepsilon\phi x$	$f'(x) = (\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
$f(x) = \sigma\phi x$	$f'(x) = (\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = (e^x)' = e^x$
$f(x) = \alpha^x$	$f'(x) = (\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ln \alpha$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Επίσης ισχύουν οι εξής κανόνες παραγώγισης :

$$\begin{aligned}
 &\triangleright (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \\
 &\triangleright (cf(x))' = cf'(x), \quad c \in \mathbb{R} \\
 &\triangleright (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
 &\triangleright \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}
 \end{aligned}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6) Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

- i. $f(x) = 4x + 5$
- ii. $f(x) = x^2 + 5x + 2013$
- iii. $f(x) = 7x^3 + 5x^2 - 3x + 1$
- iv. $f(x) = 3e^x + 9$
- v. $f(x) = 2\ln x + 5x + \frac{1}{x}$
- vi. $f(x) = 3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x$
- vii. $f(x) = 2\sqrt{x} + 3\ln x$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Λύση :

- i. $f'(x) = (4x + 5)' = (4x)' + (5)' = 4(x)' + 0 = 4 \cdot 1 = 4$
- ii. $f'(x) = (x^2 + 5x + 2013)' = (x^2)' + (5x)' + (2013)' = 2x + 5$
- iii. $f'(x) = (7x^3 + 5x^2 - 3x + 1)' = (7x^3)' + (5x^2)' - (3x)' + (1)' = 3 \cdot 7x^2 + 2 \cdot 5x - 3 = 21x^2 + 10x - 3$
- iv. $f'(x) = (3e^x + 9)' = (3e^x)' + (9)' = 3(e^x)' = 3e^x$
- v. $f'(x) = (2\ln x + 5x + \frac{1}{x})' = (2\ln x)' + (5x)' + (\frac{1}{x})' = 2(\ln x)' + 5 - \frac{1}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{x} + 5 - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} + 5 - \frac{1}{x^2}$
- vi. $f'(x) = (3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x)' = (3\eta\mu x)' - (2\sigma\upsilon\nu x)' = 3(\eta\mu x)' - 2(\sigma\upsilon\nu x)' = 3\sigma\upsilon\nu x - 2 \cdot (-\eta\mu x) = 3\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x$
- vii. $f'(x) = (2\sqrt{x} + 3\ln x)' = (2\sqrt{x})' + (3\ln x)' = 2(\sqrt{x})' + 3(\ln x)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}$

7) Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

- i. $f(x) = 2x^3 \cdot \ln x$
- ii. $f(x) = (3x^2 + 5x)(2x + 7)$
- iii. $f(x) = 4x^2\eta\mu x - 3x^2\sigma\upsilon\nu x$
- iv. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$
- v. $f(x) = \frac{x^2 + 10}{x + 11}$
- vi. $f(x) = \frac{x + \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$

Λύση :

- i. $f'(x) = (2x^3 \cdot \ln x)' = (2x^3)' \cdot \ln x + 2x^3 \cdot (\ln x)' = 6x^2 \cdot \ln x + 2x^3 \cdot \frac{1}{x} = 6x^2 \cdot \ln x + 2x^2$
- ii. $f'(x) = (3x^2 + 5x)'(2x + 7) + (3x^2 + 5x)(2x + 7)' = (6x + 5)(2x + 7) + (3x^2 + 5x) \cdot 2 = 12x^2 + 42x + 10x + 35 + 6x^2 + 10x = 18x^2 + 62x + 35$
- iii. $f'(x) = (4x^2\eta\mu x - 3x^2\sigma\upsilon\nu x)' = (4x^2\eta\mu x)' - (3x^2\sigma\upsilon\nu x)' = (4x^2)' \cdot \eta\mu x + 4x^2 \cdot (\eta\mu x)' - [(3x^2)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3x^2 \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'] = 8x \cdot \eta\mu x + 4x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - [6x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3x^2 \cdot (-\eta\mu x)] = 8x \cdot \eta\mu x + 4x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - (6x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 3x^2 \cdot \eta\mu x) = 8x \cdot \eta\mu x + 4x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - 6x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3x^2 \cdot \eta\mu x =$
- iv. $f'(x) = \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} \right)' = \frac{(x^2 + 2x - 1)' \cdot x - (x^2 + 2x - 1) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{(2x + 2)x - x^2 - 2x + 1}{x^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 2x + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$
- v. $f'(x) = \left(\frac{x^2 + 10}{x + 11} \right)' = \frac{(x^2 + 10)' \cdot (x + 11) - (x^2 + 10) \cdot (x + 11)'}{(x + 11)^2} = \frac{2x(x + 11) - (x^2 + 10)}{(x + 11)^2} = \frac{2x^2 + 22x - x^2 - 10}{(x + 11)^2} = \frac{x^2 + 22x - 10}{x^2 + 22x + 121}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$\begin{aligned}\text{vi. } f'(x) &= \left(\frac{x + \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(x + \eta\mu x)' \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x) - (x + \eta\mu x) \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x)'}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = \\ &= \frac{(1 + \sigma\upsilon\nu x) \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x) - (x + \eta\mu x) \cdot (-\eta\mu x)}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2 + (x + \eta\mu x) \cdot \eta\mu x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2}\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8) Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

- i. $f(x) = 3x + 2$
- ii. $f(x) = x^2 - 3x + 50$
- iii. $f(x) = 5x^3 + 7x^2 - 2x + 100$
- iv. $f(x) = e^x + 4$
- v. $f(x) = 6\ln x + x - \frac{1}{x}$
- vi. $f(x) = 2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x$
- vii. $f(x) = 5\varepsilon\phi x$
- viii. $f(x) = \sqrt{x} + 2\ln x + \frac{1}{x}$

9) Ομοίως

- i. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$
- ii. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$
- iii. $f(x) = (3x - x^2)(2x^3 + x)$
- iv. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$
- v. $f(x) = \eta\mu x \cdot e^x$

10) Ομοίως

- i. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$
- ii. $f(x) = \frac{3x + 2}{2x - 3}$
- iii. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
- iv. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$

11) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = 2007 \cdot x^3$
- ii. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, x > 0$
- iii. $f(x) = \sqrt[5]{x}, x > 0$
- iv. $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 5x + 1$
- v. $f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{x}, x > 0$
- vi. $f(x) = x^3 \ln x$
- vii. $f(x) = (x^4 + 3x) \cdot \varepsilon\phi x$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

viii. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ix. $f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$

x. $f(x) = e^x \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$.

xi. $f(x) = 2x \ln x + \frac{3\sigma\upsilon\nu x}{x}$

xii. $f(x) = \frac{x}{e^x}$

12) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

i. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

ii. $f(x) = (3x^2 + 1)(x^2 + 2)$

iii. $f(x) = 5x^{-3} - 2x^{-2}$

iv. $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x}}$

v. $f(x) = \frac{(2x+1)(x-2)}{3x+1}$

13) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων.

i. $f(x) = x \cdot e^x$

ii. $f(x) = 2x^3 + \ln x + 2x$

iii. $f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$

14) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = xe^x + 3$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f(x) + e^x - 3$

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$ (Πανελλήνιες 2007)

15) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = xe^x$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f''(x) - f'(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f''(x) + f'(x)}{x-1}$

16) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x + \frac{1}{x} + x \ln x$.

i. Να αποδείξετε ότι $x^2 f''(x) + x f'(x) - f(x) = 2x$ για κάθε $x \in D_f$

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x) - 3}{x^2 + 5x - 6}$

17) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$ $a, b, c \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a, b, c , αν ισχύει : $f(2)=5$, $f'(2)=4$ και $f''(1)=0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ισχύει : $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$(f^\alpha(x))' = \alpha \cdot f^{\alpha-1}(x) \cdot f'(x)$
$(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$
$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$(\alpha^{f(x)})' = \alpha^{f(x)} \cdot \ln \alpha \cdot f'(x)$
$(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$
$(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$
$(\varepsilon\phi f(x))' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$(\sigma\phi f(x))' = -\frac{1}{\eta\mu^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = (x^3 + 2x)^{2013}$
- ii. $f(x) = \ln^3 x$
- iii. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x}$
- iv. $f(x) = \ln(x^3 + 2x)$
- v. $f(x) = e^{x^3+2x}$
- vi. $f(x) = \eta\mu(x^3 + 2x)$
- vii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^3 + 2x)$
- viii. $f(x) = \varepsilon\phi(x^3 + 2x)$
- ix. $f(x) = \sigma\phi(x^3 + 2x)$
- x. $f(x) = \frac{1}{x^3 + 2x}$

Λύση :

- i. $f'(x) = [(x^3 + 2x)^{2013}]' = 2013 \cdot (x^3 + 2x)^{2012} \cdot (x^3 + 2x)' = 2013 \cdot (x^3 + 2x)^{2012} \cdot (3x^2 + 2)$
- ii. $f'(x) = (\ln^3 x)' = 3\ln^2 x \cdot (\ln x)' = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{3\ln^2 x}{x}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- iii. $f'(x) = (\sqrt{x^3 + 2x})' = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x}} \cdot (x^3 + 2x)' = \frac{3x^2 + 2}{2\sqrt{x^3 + 2x}}$
- iv. $f'(x) = (\ln(x^3 + 2x))' = \frac{1}{x^3 + 2x} \cdot (x^3 + 2x)' = \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x}$
- v. $f'(x) = (e^{x^3+2x})' = e^{x^3+2x} \cdot (x^3 + 2x)' = e^{x^3+2x} \cdot (3x^2 + 2)$
- vi. $f'(x) = (\eta\mu(x^3 + 2x))' = \sigma\upsilon\nu(x^3 + 2x) \cdot (x^3 + 2x)' = \sigma\upsilon\nu(x^3 + 2x) \cdot (3x^2 + 2)$
- vii. $f'(x) = (\sigma\upsilon\nu(x^3 + 2x))' = -\eta\mu(x^3 + 2x) \cdot (x^3 + 2x)' = -\eta\mu(x^3 + 2x) \cdot (3x^2 + 2)$
- viii. $f'(x) = (\varepsilon\phi(x^3 + 2x))' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x^3 + 2x)} \cdot (x^3 + 2x)' = \frac{3x^2 + 2}{\sigma\upsilon\nu^2(x^3 + 2x)}$
- ix. $f'(x) = (\sigma\phi(x^3 + 2x))' = -\frac{1}{\eta\mu^2(x^3 + 2x)} \cdot (x^3 + 2x)' = -\frac{3x^2 + 2}{\eta\mu^2(x^3 + 2x)}$
- x. $f(x) = \left(\frac{1}{x^3 + 2x}\right)' = -\frac{1}{(x^3 + 2x)^2} \cdot (x^3 + 2x)' = -\frac{3x^2 + 2}{(x^3 + 2x)^2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

14. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \sqrt{3x+1}$
- ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$
- iii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$
- iv. $f(x) = \sqrt{x \cdot e^x}$
- v. $f(x) = \ln(x-3)$
- vi. $f(x) = \ln(3x-2)$
- vii. $f(x) = \ln(2x^3 - 3x)$
- viii. $f(x) = \eta\mu(2x-5)$
- ix. $f(x) = \eta\mu 5x$
- x. $f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x^2$
- xi. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(2x^2 - 5)$
- xii. $f(x) = x \cdot \sqrt{e^x + 3}$
- xiii. $f(x) = \eta\mu\sqrt{x}$

15. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων

- i. $f(x) = e^{2x+2}$
- ii. $f(x) = e^{x^2+x}$
- iii. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+5x-1}}$
- iv. $f(x) = e^{-2x} \cdot (x^2 + 1)$
- v. $f(x) = (3x+1)^4$
- vi. $f(x) = (2x^2 + x)^5$
- vii. $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- viii. $f(x) = \eta\mu(x+1)^3$
- ix. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(3x^2 + 5)$
- x. $f(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \eta\mu 2x$

16. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \sqrt{e^x + x^2} - e^{-2x^2}$
- ii. $f(x) = \ln^2 x \cdot \sqrt{3+2\sigma\upsilon\nu x}$
- iii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^2 - 5x)$
- iv. $f(x) = \varepsilon\phi 3x + e^{-\frac{x}{2}}$
- v. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 3x$
- vi. $f(x) = \ln^3(e^{-2x} + 1)$
- vii. $f(x) = e^{-2x} \cdot (x^2 + 1)$
- viii. $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\eta\mu 2x}$
- ix. $f(x) = \eta\mu^2(\sqrt{x+1})$
- x. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

17. Αν $f(x) = \ln x^2$ να αποδείξετε ότι ισχύει : $x^2 \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) = 0$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} \eta\mu x$. Να δείξετε ότι $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$, παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f(x^3 + 5x) = 5x^4 + 6x^2 + 4$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το $f'(6)$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f(\ln x) = 3e^{x-1} + \ln^2 x$, για $x > 0$. Να βρεθεί το $f''(0)$.

21. Αν $f(x) = \frac{(2-x)^5}{5}$ και $f'(x_0) + 3^4 = 0$, όπου x_0 πραγματικός αριθμός, τότε να υπολογίσετε το $f(x_0)$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \cdot f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}$. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $\alpha f''(x) + \beta f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} \cdot \eta\mu 2x$. Να δείξετε ότι $f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = 0$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε να ισχύει : $2f''(x) - f'(x) = 3f(x)$.

Β. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

ΠΡΟΣΟΧΗ ΙΣΧΥΟΥΝ ΤΑ ΕΞΗΣ :

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή αν μια συνάρτηση δέχεται εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$, τότε δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη στο x_0 , αφού μπορεί να δέχεται και κατακόρυφη εφαπτομένη. (ο συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται άρα και το $f'(x_0)$).
- Αν όμως δέχεται εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) τότε είναι παραγωγίσιμη. Οι έννοιες εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ και παράγωγος στο x_0 είναι ταυτόσημες.
- Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω , τότε :
 - ω οξεία $\Leftrightarrow f'(x_0) > 0$.
 - ω αμβλεία $\Leftrightarrow f'(x_0) < 0$.
 - $\omega = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ ($// x'x$).

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

$$\varepsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varepsilon\phi 45^\circ = 1 \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\varepsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

2^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

$$\varepsilon\phi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varepsilon\phi 135^\circ = -1 \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\varepsilon\phi 120^\circ = -\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ $M(x_0, f(x_0))$

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε γνωστό σημείο $M(x_0, f(x_0))$, βρίσκουμε το $f'(x_0)$ άρα το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$. Στη συνέχεια βρίσκω την $f'(x)$ και το $f'(x_0)$. Θεωρούμε ότι η εφαπτομένη που ψάχνω έχει εξίσωση $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ άρα είναι $\lambda = f'(x_0)$ δηλ. $(\varepsilon): y = f'(x_0)x + \beta$ και επειδή η (ε) διέρχεται από το $M(x_0, f(x_0))$ άρα οι συντεταγμένες του M θα την επαληθεύουν. Δηλ. $(\varepsilon): f(x_0) = f'(x_0)x_0 + \beta$ και έτσι υπολογίζω το β .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $A(2, f(2))$, τότε $(\varepsilon): y = f'(2)x + \beta$. Το σημείο $A(2, f(2)) \rightarrow A(2, 7)$. Έχω : $f'(x) = 2x - 1$ άρα $f'(2) = 3$. Ισχύει : $(\varepsilon): y = f'(2)x + \beta \Leftrightarrow y = 3x + \beta$. Όμως η (ε) διέρχεται από το $A(2, 7)$, άρα οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την εξίσωση της. Άρα έχω :

$$y = 3x + \beta \Leftrightarrow \begin{matrix} x=2 \\ y=7 \end{matrix} \Leftrightarrow 7 = 3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 7 = 6 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1. \text{ Άρα : } (\varepsilon): y = 3x + 1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

23) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $M(-1, f(-1))$
- ii. $f(x) = 2e^x$, $M(0, f(0))$
- iii. $f(x) = x^2 \ln x$, $M(1, f(1))$
- iv. $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 3}$, $M(1, f(1))$
- v. $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$, $M(2, f(2))$
- vi. $f(x) = e^{-x}$, $M(e, f(e))$
- vii. $f(x) = x \ln x$, $M(e, f(e))$

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta \mu x}{1 + \sigma \upsilon \nu x}$.

- i. Να βρείτε την $f'(x)$
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην καμπύλη της f στο $x_0 = \frac{2\pi}{3}$

25) Αν $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, να προσδιοριστούν τα α, β ώστε η εφαπτομένη της f στο $M(1, 2)$ να έχει κλίση $\lambda = 4$.

26) Να βρείτε την τιμή των α, β ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \alpha \ln \left(\frac{1}{(x+3)^3} \right) + \beta e^x - 1$ στο σημείο της $O(0, 0)$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 120° .

27) Να βρείτε την τιμή των α, β ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \alpha e^{-x} + \beta \sqrt{x+1}$ στο σημείο της $A(0, 1)$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = 2x - 1$. Στη συνέχεια να βρείτε και την εξίσωση της εφαπτομένης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x}$. Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-2, -5)$ και η εφαπτομένη της f στο A σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$.
- Να βρείτε τα α, β .
 - Για $\alpha = -\frac{1}{4}$ και $\beta = 8$ να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της $f'(x)$ στο σημείο $B(-1, f'(-1))$.
- 29) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^2 + \ln x, x > 0$. Να βρείτε :
- Την $f'(x)$.
 - Να προσδιορίσετε το κ , ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ να είναι 9.
 - Να προσδιορίσετε το $f(1)$.
 - Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης ευθείας
- 30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 - Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$
 - Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.
 - Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$. (Πανελλήνιες 2010)
- 31) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης $y = \frac{5}{1+x^2}$ στο σημείο $M(-2, 1)$.
- 32) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα : $f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f'(3) = 5$ και στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(3, f(3))$.
- 33) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 6\ln(x + 2)$. Να βρείτε :
- Το πεδίο ορισμού και την $f'(x)$
 - Το πρόσημο της $f'(x)$
 - Την κλίση της C_f στο $A(0, f(0))$, καθώς και τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο A με τον άξονα $x'x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΚΛΙΣΗ ΤΗΣ

Όταν δε μας δίνεται το σημείο επαφής αλλά ένα στοιχείο για την κλίση της εφαπτομένης, τότε ξεκινάμε θεωρώντας το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$ το οποίο πρέπει και να υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας το στοιχείο για την κλίση της εφαπτομένης. Πιο συγκεκριμένα διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ): $y = \lambda_\zeta x + \beta$, όταν $\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow f'(x_0) = \lambda_\zeta$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία (ζ): $y = \lambda_\zeta x + \beta$, όταν $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{\lambda_\zeta}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, όταν $\lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ σχηματίζει γωνία $\omega \neq 90^\circ$ με τον άξονα $x'x$, όταν $\lambda_\varepsilon = \tan \omega \Leftrightarrow f'(x_0) = \tan \omega$ (ισχύει ότι $\tan(\pi - \omega) = -\tan \omega$)
Αφού βρούμε το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$, εργαζομαστε όπως στη μεθοδολογία 1.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 34) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που
- Έχει συντελεστή διεύθυνσης 5
 - Είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ): $y = x + 5$
 - Είναι κάθετη στην ευθεία (η): $x - 3y + 12 = 0$
 - Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
 - Σχηματίζει γωνία με τον άξονα $x'x$ 45° .

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $M(x_0, f(x_0))$, τότε $(\varepsilon): y = f'(x_0)x + \beta$. Επίσης $f'(x) = -2x + 3$.

- Η (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης 5 άρα $f'(x_0) = 5 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 5 \Leftrightarrow x_0 = -1$. Άρα $M(-1, f(-1)) \rightarrow M(-1, -4)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y = f'(-1)x + \beta \Leftrightarrow y = 5x + \beta$. Όμως η (ε) διέρχεται από το $M(-1, -4)$, άρα οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση της. Άρα έχω : $y = 5x + \beta \xrightarrow{x=-1, y=-4} -4 = 5 \cdot (-1) + \beta \Leftrightarrow -4 = -5 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$. Άρα : $(\varepsilon): y = 5x + 1$.
- Η (ε)//(ζ): $y = x + 5 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Άρα $M(1, f(1)) \rightarrow M(1, 2)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y = f'(1)x + \beta \Leftrightarrow y = x + \beta$. Όμως η (ε) διέρχεται

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

από το $M(1,2)$, άρα οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση της. Άρα

$$\text{έχω : } y = x + \beta \stackrel{x=1}{y=2} \Leftrightarrow 2 = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1. \text{ Άρα : } (\varepsilon) : y = x + 1.$$

- iii. $(\varepsilon) \perp (\eta) : x - 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \stackrel{\lambda_\eta = -\frac{A}{B} = \frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} \lambda_\varepsilon = -3$ (Όταν δυο ευθείες είναι κάθετες οι συντελεστές διεύθυνσης τους είναι αντιθετοαντιστροφικοί).
 $\lambda_\varepsilon = -3 \Leftrightarrow f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = -3 \Leftrightarrow -2x_0 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 3$. Άρα
 $M(3, f(3)) \rightarrow M(3,0)$. Ισχύει : $(\varepsilon) : y = f'(3)x + \beta \Leftrightarrow y = -3x + \beta$. Όμως η (ε) διέρχεται από το $M(3,0)$, άρα οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση της. Άρα έχω : $y = -3x + \beta \stackrel{x=3}{y=0} \Leftrightarrow 0 = -9 + \beta \Leftrightarrow \beta = 9$. Άρα : $(\varepsilon) : y = -3x + 9$.

- iv. $(\varepsilon) // x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$. Άρα
 $M\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) \rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Ισχύει : $(\varepsilon) : y = f'\left(\frac{3}{2}\right)x + \beta \Leftrightarrow y = 0x + \beta \Leftrightarrow y = \beta$. Όμως η (ε) διέρχεται από το $M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, άρα οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση της. Άρα έχω : $y = \beta \stackrel{y=\frac{9}{4}}{\Leftrightarrow} \beta = \frac{9}{4}$. Άρα : $(\varepsilon) : y = \frac{9}{4}$.

(Θα μπορούσαμε να πούμε ότι επειδή $(\varepsilon) // x'x$ άρα θα είναι της μορφής $y = y_0$ και αφού βρούμε το σημείο επαφής $M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, να πούμε κατευθείαν $(\varepsilon) : y = \frac{9}{4}$)

- v. Η (ε) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° άρα
 $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\phi\omega \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \varepsilon\phi 45^\circ \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Άρα
 $M(1, f(1)) \rightarrow M(1,2)$. Ισχύει : $(\varepsilon) : y = f'(1)x + \beta \Leftrightarrow y = x + \beta$. Όμως η (ε) διέρχεται από το $M(1,2)$, άρα οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση της. Άρα
 $\text{έχω : } y = x + \beta \stackrel{x=1}{y=2} \Leftrightarrow 2 = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$. Άρα : $(\varepsilon) : y = x + 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

- 35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που
- Έχει συντελεστή διεύθυνσης 3
 - Είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta) : y = 5x + 7$
 - Είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta) : x - 7y + 13 = 0$
 - Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
 - Σχηματίζει γωνία με τον άξονα $x'x$ 45° .
 - Σχηματίζει γωνία με τον άξονα $x'x$ 135° .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 36) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που
- Έχει συντελεστή διεύθυνσης 2
 - Είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): 3x + y - 1 = 0$
 - Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
 - Σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.
- 37) Να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 1$ που σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία $\frac{2\pi}{3}$.
- 38) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2, x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 9$
 - Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$. (Πανελλήνιες 2009)
- 39) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της $f(x) = x \ln x$ που είναι παράλληλες στη διχοτόμο της γωνίας $x'Oy$.
- 40) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$ που είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.
- 41) Να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x + 1$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = x + 2$.
- 42) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της f ώστε οι εφαπτομένες σ' αυτά να είναι παράλληλες στην ευθεία $(\zeta): y = 2x$.
- 43) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 1$. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της f που οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$ και μετά τις εξισώσεις των εφαπτομένων.
- 44) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-2x}(x^2 + 5)$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της f ώστε οι εφαπτομένες σ' αυτά να είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.
- 45) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ σε οποιοδήποτε σημείο της σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΠΟΥ ΔΕΝ ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΗ C_f

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ που **δεν ανήκει** στη C_f , εργαζόμαστε ως εξής :

- 1) θεωρούμε $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής
 - 2) γράφουμε τον τύπο της εφαπτομένης $(\varepsilon): y = f'(x_0)x + \beta$
 - 3) η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(x_1, y_1)$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της, Δηλ. $(\varepsilon): y_1 = f'(x_0)x_1 + \beta$ (1)
 - 4) η (ε) διέρχεται από το σημείο $M(x_0, f(x_0))$, άρα ομοίως οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της, Δηλ. $(\varepsilon): f(x_0) = f'(x_0)x_0 + \beta$ (2)
 - 4) από τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε τις τιμές των x_0, β άρα και την εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης.
- (Προσοχή : σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να μπερδεύουμε το σημείο επαφής με το σημείο διέλευσης.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 46) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ που διέρχονται από το σημείο $A(3,2)$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $M(x_0, f(x_0))$, τότε $(\varepsilon): y = f'(x_0)x + \beta$. Επίσης $f'(x) = 6x - 5$.

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την

$$\begin{aligned} \text{εξίσωση της, Δηλ. } (\varepsilon): y &= f'(x_0)x + \beta \Leftrightarrow 2 = f'(x_0) \cdot 3 + \beta \Leftrightarrow 2 = 3(6x_0 - 5) + \beta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 = 18x_0 - 15 + \beta \Leftrightarrow 18x_0 + \beta = 17 \quad (1). \end{aligned}$$

Επίσης η (ε) διέρχεται από το σημείο $M(x_0, f(x_0))$, άρα ομοίως οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της, Δηλ.

$$\begin{aligned} (\varepsilon): y &= f'(x_0)x + \beta \Leftrightarrow f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + \beta \Leftrightarrow 3x_0^2 - 5x_0 + 2 = (6x_0 - 5) \cdot x_0 + \beta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x_0^2 - 5x_0 + 2 = 6x_0^2 - 5x_0 + \beta \Leftrightarrow 3x_0^2 + \beta - 2 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Η (1) $18x_0 + \beta = 17 \Leftrightarrow \beta = 17 - 18x_0$ (1). Η (2) λόγω της (1) γίνεται

$$3x_0^2 + 17 - 18x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 18x_0 + 15 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 6x_0 + 5 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 5, \acute{\eta}, x_0 = 1$$

$$\text{➤ Για } x_0 = 5, \beta = 17 - 18 \cdot 5 \Leftrightarrow \beta = -73 \text{ άρα } (\varepsilon_1): y = f'(5)x - 73 \Leftrightarrow y = 25x - 73$$

$$\text{➤ Για } x_0 = 1, \beta = 17 - 18 \cdot 1 \Leftrightarrow \beta = -1 \text{ άρα } (\varepsilon_2): y = f'(1)x - 1 \Leftrightarrow y = x - 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

- 47) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

- 48) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΝΑ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΗ C_f

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ εφάπτεται στη C_f , αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in D_f$, ώστε να ισχύει $f(x_0) = \lambda x_0 + \beta$ και $f'(x_0) = \lambda$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 49) Αν η ευθεία $y = 6x - 2$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - \alpha x + \beta$ στο σημείο $M(2, f(2))$, να βρείτε τα α, β .

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $M(2, f(2))$, τότε $(\varepsilon) : y = f'(2)x + \beta$. Επίσης $f'(x) = 4x - \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Η ευθεία } y = 6x - 2 \text{ εφάπτεται στη } C_f \text{ στο} \\ M(2, f(2)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 6 \cdot 2 - 2 \\ f'(2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 2\alpha + \beta = 10 \\ 8 - \alpha = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = 2 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

- 50) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Η ευθεία $(\zeta) : y = 6x - 4$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $M(1, f(1))$.
- Να βρείτε τις τιμές των $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$
 - Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\eta) : y = 2x - 4$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f .
- 51) Αν η ευθεία $y = 2\alpha x - \beta$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x$ στο σημείο $M(1, f(1))$, να βρείτε τα α, β .
- 52) Αν η ευθεία $y = \lambda x - 1$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x$, να βρείτε το σημείο επαφής και στη συνέχεια την ευθεία (ε) .
- 53) Αν η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = xe^{-\lambda x}$, $\lambda \neq 0$, να βρείτε το σημείο επαφής.
- 54) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x - \beta x^2$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 - Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε x , το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της.
 - Να βρείτε τα α, β ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ να έχει εξίσωση $y = 3x - 2$
 - Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} (f'(x)x^3)$ (Πανελλήνιες 2005)
- 55) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x^2 + 3x$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της f στο $x_0 = 1$ και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.
 - Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη, εφάπτεται και στην καμπύλη της g .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΥΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥΣ

Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δυο συναρτήσεων f, g έχουν κοινή εφαπτομένη (ή αλλιώς εφάπτονται μεταξύ τους) στο κοινό σημείο τους $M(x_0, y_0)$, αν ισχύει :
 $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 56) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ και $g(x) = x^2 + 2\kappa x + \lambda$. Να βρεθούν τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = -1$.

Λύση :

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x-1} \right)' = \frac{(2x)'(x-1) - 2x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = 2x + 2\kappa$$

Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους με $x_0 = -1$, άρα ισχύει :

$$f(-1) = g(-1) \text{ και } f'(-1) = g'(-1)$$

$$\text{Έχω } f(-1) = g(-1) \Leftrightarrow \frac{-2}{-2} = 1 - 2\kappa + \lambda \Leftrightarrow 1 = 1 - 2\kappa + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2\kappa \quad (1)$$

$$\text{Και } f'(-1) = g'(-1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = -2 + 2\kappa \Leftrightarrow -1 = -4 + 4\kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{3}{4}, \text{ άρα από (1) } \lambda = 2\kappa \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

- 57) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x - 2$ και $g(x) = -x^2 + x - 7$.

- Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$
- Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ϵ), εφάπτεται και στη C_g

- 58) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x^2-2x} + (x^2 - 5)^4$ και $g(x) = x^2 + \beta x + \gamma$.

- Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$
- Να βρείτε τις τιμές των $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (ϵ) να εφάπτεται και στη C_g στο σημείο της $N(3, g(3))$.

Δ. ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Για να επιλύσουμε προβλήματα σχετικά με ρυθμούς μεταβολής μεγεθών, κάνουμε τα εξής :

- Πρώτα καταγράφουμε όλους τους αγνώστους, καθώς και τις σχέσεις που τους συνδέουν. Αν η σχέση που συνδέει τους αγνώστους δε δίνεται στην εκφώνηση, τότε την φτιάχνουμε μέσα από τα δεδομένα της εκφώνησης (είτε με σχήμα, είτε με τη λογική σκέψη).
- Έπειτα μετατρέπουμε τη σχέση που συνδέει τους αγνώστους σε συνάρτηση ως προς τον ανεξάρτητο άγνωστο.
- Υπολογίζουμε τις τιμές των αγνώστων όταν $x = x_0$ που ζητείται ο ρυθμός μεταβολής.
- Τέλος παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που φτιάξαμε και με αντικατάσταση $x = x_0$ προκύπτει ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Για να επιλύσουμε προβλήματα σχετικά με ρυθμούς μεταβολής γεωμετρικών μεγεθών, κάνουμε τα εξής :

- Κάνουμε ένα σχήμα όπου περιγράφουμε το πρόβλημα.
- Εντοπίζουμε τα μεγέθη που παραμένουν σταθερά και γράφουμε με γράμματα τα μεγέθη που μεταβάλλονται.
- Σχηματίζουμε, με τη βοήθεια του σχήματος, μια ή περισσότερες σχέσεις που συνδέουν τις μεταβλητές του προβλήματος για κάθε χρονική στιγμή.
- Παραγωγίζουμε τα δυο μέλη της σχέσης (ή των σχέσεων) που σχηματίζουμε ως προς την κατάλληλη μεταβλητή και έτσι παρουσιάζεται ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής.
- Επιλύουμε την τελευταία εξίσωση ως προς τον ζητούμενο ρυθμό μεταβολής.
- Αν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, τότε θέτουμε στον τελικό τύπο τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές τη δεδομένη στιγμή και βρίσκουμε το αριθμητικό αποτέλεσμα.
- Αν δίνεται ότι μια ποσότητα αυξάνεται ως προς τον χρόνο, τότε θέτουμε $f'(t)=\alpha$ και αν μειώνεται $f'(t)=-\alpha$, όπου α θετική σταθερά.

Υπενθύμιση : Εμβαδόν σφαίρας : $E = 4\pi R^2$, Όγκος σφαίρας : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Εμβαδόν κώνου : $E = \pi R\lambda + \pi R^2$, Όγκος κώνου : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon$,

Όγκος πυραμίδας : $V = \frac{1}{3}E_{\text{βάσης}} \cdot \upsilon$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 59) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων A(4,0) και B(0,x) ως προς x, όταν x=3.

Λύση :

Η Απόσταση δυο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ Δίνεται από τον τύπο :

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} . \text{ Άρα } (AB) = \sqrt{(0 - 4)^2 + (x - 0)^2} = \sqrt{16 + x^2}$$

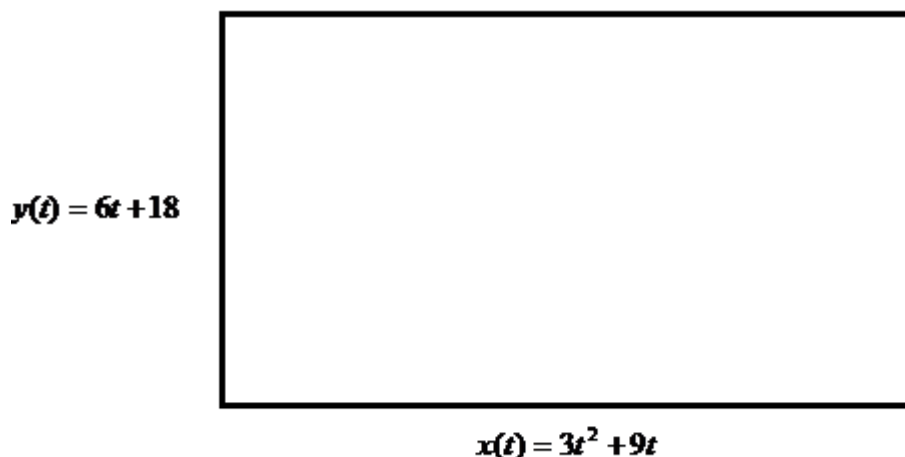
Άρα η συνάρτηση που δίνει την απόσταση (AB) ως προς x είναι $f(x) = \sqrt{16 + x^2}$ με $D_f = \mathbb{R}$. Εδώ θέλω το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ όταν x=3, δηλ. το $f'(3)$. Βρίσκω

$$\text{πρώτα την } f'(x) = (\sqrt{16 + x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{16 + x^2}} \cdot (16 + x^2)' = \frac{2x}{2\sqrt{16 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}}$$

$$\text{Άρα } f'(3) = \frac{3}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5}$$

- 60) Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις $x(t) = 3t^2 + 9t$ και $y(t) = 6t + 18$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο.

Λύση :



$$E = x \cdot y \text{ άρα } E(t) = x(t) \cdot y(t) = (3t^2 + 9t)(6t + 18) = 18t^3 + 54t^2 + 54t^2 + 162t = 18t^3 + 108t^2 + 162t$$

Τη χρονική στιγμή που το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο θα ισχύει $x(t) = y(t) \Leftrightarrow 3t^2 + 9t = 6t + 18 \Leftrightarrow 3t^2 + 3t - 18 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2, \acute{\eta}, t = -3$ απορ.

Η συνάρτηση του εμβαδού είναι $E(t) = 18t^3 + 108t^2 + 162t$. Εδώ θέλω το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο δηλ. το $E'(2)$. Βρίσκω πρώτα $E'(t) = 54t^2 + 216t + 162$. Άρα $E'(2) = 54 \cdot 2^2 + 216 \cdot 2 + 162 = 810$ τετραγωνικές μονάδες/sec.

- 61) Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x = x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.

i. Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο t.

ii. Ποια είναι η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο 2 s και ποια σε χρόνο 4 s;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- iii. Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;
- iv. Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
- v. Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 5 s.

Λύση :

- i. Η ταχύτητα είναι : $v(t) = x'(t) = (t^3 - 6t^2 + 9t)' = 3t^2 - 12t + 9$.
- ii. Η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο $t = 2s$ είναι $v(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 \text{ m/s}$ και σε χρόνο $t = 4s$ είναι $v(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 \text{ m/s}$.
- iii. Το σημείο είναι ακίνητο, όταν $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ή $t = 3$.

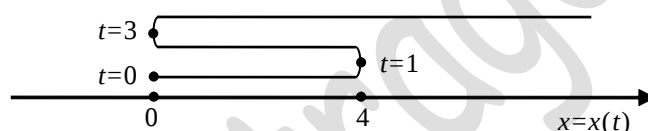
Άρα, το σημείο είναι ακίνητο ύστερα από 1 s και ύστερα από 3 s.

- iv. Το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση, όταν

$$v(t) > 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 > 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 > 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) > 0 \Leftrightarrow t < 1 \text{ ή } t > 3.$$

Άρα, το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση στα χρονικά διαστήματα $t < 1$ και $t > 3$ (και στην αρνητική κατεύθυνση όταν $1 < t < 3$).

Σχηματικά η κίνηση του υλικού σημείου μπορεί να παρασταθεί ως εξής:



- v. Η απόσταση που διανύθηκε από το κινούμενο σημείο είναι:

- Στη διάρκεια του πρώτου δευτερόλεπτου $S_1 = |x(1) - x(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$.
- Από $t = 1$ μέχρι $t = 3$ $S_2 = |x(3) - x(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$
- Από $t = 3$ μέχρι $t = 5$ $S_3 = |x(5) - x(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$

Άρα, το ολικό διάστημα S που διάνυσε το σημείο σε χρόνο 5s είναι

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 4 + 4 + 20 = 28 \text{ m}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

- 62) Το συνολικό κόστος x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x) = 30x^2 - 1000x - 50$ και η συνολική είσπραξη $E(x) = 2x^3 - 60x^2 + 200x + 100$ σε χιλ €. Να βρείτε τον αριθμό των μονάδων του προϊόντος που πρέπει να παραχθεί ώστε να έχουμε θετικό ρυθμό μεταβολής του κέρδους (κερδοφόρα επιχείρηση).
- 63) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(1,2)$ και $B(x,0)$ ως προς x , όταν $x=1$.
- 64) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του τυχαίου σημείου M που ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = e^x$ από την αρχή των αξόνων ως προς x , όταν $x=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 65) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^3(ax-1)^2$
- Να βρείτε το a ώστε ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x να μηδενίζεται για $x = \frac{1}{2}$.
 - Για $a=2$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) στην καμπύλη της f στο σημείο $A(2, f(2))$.
- 66) Έστω τα σημεία $A(0, x+1)$ και $B(\sqrt{x}, 0)$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής ,
- Της απόστασης των σημείων A και B ως προς x όταν $x=1$.
 - Του εμβαδού του τριγώνου OAB ως προς x όταν $x=1$.
- 67) Δίνεται το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x > 0$. Αν $A(x^2, 0)$, να βρείτε :
- Το εμβαδόν E του τριγώνου MOA ως συνάρτηση του x .
 - Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του τριγώνου MOA ως προς x όταν $x=1$.
- 68) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$ και ε η εφαπτομένη ευθεία στην καμπύλη της f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha > 1$. Να βρείτε :
- Την εξίσωση της ε
 - Τα σημεία τομής A , B της ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.
 - Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB ως προς α όταν $\alpha=e$.
- 69) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $\alpha = x^2$ και $\beta = e^{2x}$ ως προς x όταν $x=1$.
- 70) Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x = x(t) = t(t-9)^2$ όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.
- Να βρείτε την ταχύτητα και στη συνέχεια την ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t=3s$
 - Να βρείτε την επιτάχυνση και στη συνέχεια την επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t=2s$
 - Πότε το σημείο είναι ακίνητο;
 - Πότε το σημείο κινείται στη θετική και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
 - Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων $4s$.
- 71) Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x = x(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t$ όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.
- Να βρείτε την ταχύτητα και στη συνέχεια την ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t=1s$
 - Να βρείτε την επιτάχυνση και στη συνέχεια την επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t=2s$
 - Πότε το σημείο είναι ακίνητο;
 - Πότε το σημείο κινείται στη θετική και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
 - Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων $7s$.

1.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

A. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : Εύρεση Μονοτονίας – Ακρότατων

Για να εξετάσουμε μια συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

- i. Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της D_f .
- ii. Βρίσκουμε την $f'(x)$ χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης.
- iii. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
- iv. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f στον οποίο πρέπει να περιέχονται το Π.Ο. της f καθώς και οι ρίζες της $f'(x) = 0$.
- v. Βρίσκουμε το πρόσημο της $f'(x)$ είτε λύνοντας τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ είτε βρίσκοντας το πρόσημο μιας τιμής της $f'(x)$ σε κάθε διάστημα που ορίζουν οι ρίζες της.
- vi. Συμπληρώνουμε το είδος της μονοτονίας της $f(x)$ ανάλογα με το πρόσημο της $f'(x)$. Ισχύει :
 - Αν $f'(x) > 0$ τότε η $f(x)$ γνησίως αύξουσα
 - Αν $f'(x) < 0$ τότε η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα
- i. Αν η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν σε μια ρίζα της $f'(x) = 0$, τότε η f παρουσιάζει ακρότατο.
- ii. Αν η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο, δηλαδή η $f(x)$ δεν αλλάζει μονοτονία, τότε η $f(x)$ δεν έχει ακρότατα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

- i. $f(x) = x^2 - 6x + 1$
- ii. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$
- iii. $f(x) = xe^x$
- iv. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Λύση :

- i. $f(x) = x^2 - 6x + 1$, $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 6$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις πρωτοβάθμιες ανισώσεις, δηλ. δεξιά του 0 ομόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x)

Όπως βλέπουμε και από το πίνακάκι :

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 3)$ άρα η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (-\infty, 3)$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (3, +\infty)$ άρα η $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [3, +\infty)$

Η $f(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 3$, το $f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 1 = -8$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ii. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$, $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$,
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3, \eta, x = 1$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	γν. αύξουσα	T.M.	γν. φθίνουσα	T.E.	γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις δευτεροβάθμιες ανισώσεις, δηλ. όταν $\Delta > 0$ και η εξίσωση έχει 2 ρίζες, τότε για τα πρόσημα ισχύει ότι εντός των ριζών είναι ετερόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x^2)

Όπως βλέπουμε και από το πίνακάκι :

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ άρα η $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (-\infty, -3]$ και για κάθε $x \in [1, +\infty)$

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-3, 1)$ άρα η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [-3, 1]$

Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -3$, το $f(-3) = 34$

Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$, το $f(1) = 2$

iii. $f(x) = xe^x$, $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + xe^x$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + xe^x = 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) = 0 \Leftrightarrow \overset{e^x > 0}{1+x} = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	γν. φθίνουσα	O.E.	γν. αύξουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$)

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x + xe^x > 0 \Leftrightarrow \overset{e^x > 0}{e^x(1+x)} > 0 \Leftrightarrow 1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x + xe^x < 0 \Leftrightarrow \overset{e^x > 0}{e^x(1+x)} < 0 \Leftrightarrow 1+x < 0 \Leftrightarrow x < -1$ (Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πίνακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πίνακάκι :

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ άρα η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (-\infty, -1]$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ άρα η $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [-1, +\infty)$

Η $f(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = -1$, το $f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

iv. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $D_f = (0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	γν. αύξουσα	O.M.	γν. φθίνουσα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$)

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2(1-\ln x) > 0 \xLeftrightarrow^{x^2>0 \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty)} 1-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2(1-\ln x) < 0 \xLeftrightarrow^{x^2>0 \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty)} 1-\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$$

(Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πίνακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πίνακάκι :

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, e)$ άρα η $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (0, e]$

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (e, +\infty)$ άρα η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [e, +\infty)$

Η $f(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = e$, το $f(e) = \frac{1}{e}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

- i. $f(x) = 3x + 5$
- ii. $f(x) = -2x + 2$
- iii. $f(x) = -x^2 + 4x - 1$
- iv. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$
- v. $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 5x + 1$
- vi. $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1$
- vii. $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$

3. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

- i. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
- ii. $f(x) = \frac{3x}{x^2 - x + 3}$
- iii. $f(x) = \frac{x}{e^x}$
- iv. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$
- v. $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$
- vi. $f(x) = x \ln x$
- viii. $f(x) = x^2 \cdot e^x$
- vii. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$
- viii. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ix. $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x-2}$

x. $f(x) = 1 - x^2 - \frac{2}{x}$

xi. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

xii. $f(x) = 2xe^{-x} + (x-1)^2$

xiii. $f(x) = (x^2 - x)\ln x + \frac{x^2}{2}$

xiv. $f(x) = 2\ln x + \frac{1}{x^2}$

4. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα :
(Υπόδειξη : Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση $f(x)$, με $D_f = (\alpha, \beta)$, δεν έχει ακρότατα, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη στο (α, β))

i. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 2011$

ii. $f(x) = x - \ln x - \frac{x^2}{2}$

iii. $f(x) = \ln(x-2) - x + \frac{x^2}{2}$

iv. $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$

v. $f(x) = e^{x^3+x} + x^3 - 6x^2 + 12x$

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+2}{e^x}$ δεν έχει ακρότατα.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2xe^x - 8e^x - x^2 + 6x - 9$. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x\sin x - \eta\mu x$. Να βρείτε τα ακρότατα της f .

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x + 3$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 11x - 1$.

i. Να βρείτε τις τιμές των α, β

ii. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα

iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f'(x)}{\sqrt{x+2} - x}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x - x + 1$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της g

ii. Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x} + x$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ και ότι δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη στη καμπύλη της f .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : Προσδιορισμός Παραμέτρων

Όταν ο τύπος μιας συνάρτησης f περιέχει παραμέτρους και γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε για να βρούμε την παράμετρο

- Αφού στο x_0 η f παρουσιάζει ακρότατο τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$. Με την επίλυση της συγκεκριμένης εξίσωσης βρίσκουμε την τιμή της παραμέτρου.
- Επειδή η συνθήκη $f'(x_0) = 0$ δεν είναι αρκετή για να παρουσιάζει η f ακρότατο στο x_0 (πρέπει επιπλέον η $f'(x)$ να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0), πρέπει να εξετάσουμε αν οι τιμές των παραμέτρων είναι δεκτές. Γι' αυτό αντικαθιστούμε τις τιμές των παραμέτρων στον τύπο της f και τη μελετάμε ως προς τα ακρότατα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

10. Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3\alpha x^2 + 3\beta x + 2\alpha - \beta - 3$, $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α, β αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ το 2.

Λύση :

$$D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 6\alpha x + 3\beta$$

Για να παρουσιάζει η $f(x)$ ακρότατο στο $x_0 = 1$, πρέπει :

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 6\alpha + 3\beta = 0 \Leftrightarrow \beta - 2\alpha = -1 \quad (1)$$

Επίσης το ακρότατο στο $x_0 = 1$ είναι το 2 άρα $f(1) = 2 \Leftrightarrow 1 - 3\alpha + 3\beta + 2\alpha - \beta - 3 = 2 \Leftrightarrow$

$$2\beta - \alpha = 4 \quad (2). \text{ Από (1) και (2) έχω : } \begin{cases} \beta - 2\alpha = -1 \\ 2\beta - \alpha = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}.$$

Άρα : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	γν. αύξουσα	T.M.	γν. φθίνουσα	T.E.	γν. αύξουσα

Όπως βλέπουμε και από το πίνακάκι :

Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$, το $f(1) = 2$

Άρα οι λύσεις $\alpha = 2$ και $\beta = 3$ είναι δεκτές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

11. Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + \mu x + 7$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α, β αν είναι γνωστό ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ το 2.
- ii. Να βρείτε το είδος και τις τιμές των τοπικών ακρότατων της f .

12. Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 3x - 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 2$ και $x_2 = -2$. Να βρείτε :

- i. τους αριθμούς α, β
- ii. το είδος και τις τιμές των ακρότατων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

13. Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + \alpha x + \beta \ln x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(1,9)$. Επίσης η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$. Να βρείτε :
- τους αριθμούς α, β
 - το είδος και τις τιμές των ακρότατων.
 - την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M .
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 9x - 2011$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-2}{3}x^3 + \lambda x^2 + 2(\lambda - 3)x + 2012$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + \alpha)e^{3x}$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
17. Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda$, $x, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ , αν είναι γνωστό ότι το τοπικό ελάχιστο της f είναι αντίθετο από το τοπικό της μέγιστο.
18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \lambda$, $x, \lambda \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου λ , αν είναι γνωστό ότι το τοπικό μέγιστο της f είναι τριπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : Απόδειξη Ανισοτήτων με Μονοτονία ή με Ακρότατα

Για τη μονοτονία ισχύει :

- αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
- αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

Για τα ακρότατα ισχύει :

- Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 . Αντίστοιχα μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0 όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 . Αντίστοιχα μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 1$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να αποδείξετε ότι : $\frac{e^3}{3} - \frac{\pi^3}{3} > 2e^2 - 2\pi^2 + 5e - 5\pi$

Λύση :

- $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 4x - 5$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1, \eta, x = 5$

x	$-\infty$	-1		5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	γν. αύξουσα	T.M.	γν.φθινουσα	T.E.	γν. αύξουσα

Όπως βλέπουμε και από το πίνακάκι :

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$ άρα η $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (-\infty, -1]$ και για κάθε $x \in [5, +\infty)$

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 5)$ άρα η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [-1, 5]$

- Πρέπει να αποδείξω ότι ισχύει η σχέση :

$$\frac{e^3}{3} - \frac{\pi^3}{3} > 2e^2 - 2\pi^2 + 5e - 5\pi \Leftrightarrow \frac{e^3}{3} - 2e^2 - 5e > \frac{\pi^3}{3} - 2\pi^2 - 5\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^3}{3} - 2e^2 - 5e + 1 > \frac{\pi^3}{3} - 2\pi^2 - 5\pi + 1 \Leftrightarrow f(e) > f(\pi)$$

Τα $e, \pi \in (-1, 5)$ στο οποίο η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα θα ισχύει :

$$\begin{matrix} f \downarrow \\ e < \pi \end{matrix} \Leftrightarrow f(e) > f(\pi)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - x^2 + 2013$.

- Να βρείτε τα ακρότατα της f
- Να αποδείξετε ότι : $x^2 - 2\ln x \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

Λύση :

- $D_f = (0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2}{x} - 2x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - 2x = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 1, \text{ ή } x = -1$ απορρίπτεται.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	γν. αύξουσα	Ο.Μ.	γν. φθίνουσα

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - 2x > 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 2x^2}{x} > 0 \Leftrightarrow x(2 - 2x^2) > 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-1, 1) \text{ * Επειδή όμως πρέπει } x > 0, \text{ άρα } x \in (0, 1)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - 2x < 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 2x^2}{x} < 0 \Leftrightarrow x(2 - 2x^2) < 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 < 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \text{ * Επειδή όμως πρέπει } x > 0, \text{ άρα } x \in (1, +\infty)$$

*Για την ανίσωση $1 - x^2 > 0$, έχω $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα η $f(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 2012$

- Επειδή η $f(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 2012$, τότε ισχύει :
 $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 2\ln x - x^2 + 2013 \leq 2012 \Leftrightarrow 2\ln x - x^2 \leq -1 \Leftrightarrow x^2 - 2\ln x \geq 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να αποδείξετε ότι : $\frac{\pi^3 - e^3}{3} < 2(\pi^2 - e^2)$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να αποδείξετε ότι : $\ln x \leq \frac{x^2 - 1}{2}$, για κάθε $x > 0$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να αποδείξετε ότι : $\ln x \geq -\frac{1}{ex}$, για κάθε $x > 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Αν $\alpha > \beta > 0$, να αποδείξετε ότι $e^{\alpha-\beta} > \frac{\beta}{\alpha}$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να αποδείξετε ότι : $\ln x \geq \frac{x-1}{x}$, για κάθε $x > 0$
- Αν $\alpha > \beta > 1$, να αποδείξετε ότι $\ln \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- Να βρείτε τα ακρότατα της f
- Να αποδείξετε ότι : $x^e \leq e^x$, για κάθε $x > 0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : Μονοτονία & Επίλυση Εξισώσεων - Ανισώσεων

- Για **εξισώσεις** ισχύει ότι : αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ρίζα, τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Σε αυτή την περίπτωση συχνά ψάχνω να βρω την προφανή ρίζα της εξίσωσης $(0, 1, e, \dots)$ και στη συνέχεια δείχνω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη, άρα η προφανής ρίζα είναι μοναδική.
- Για **ανισώσεις** ισχύει ότι :
 - αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
 - αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x + \ln x - 1 - e$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $e^x + x + \ln x = 1 + e$.

Λύση :

- $D_f = (0, +\infty)$, $f'(x) = e^x + 1 + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = (0, +\infty)$.
- $e^x + x + \ln x = 1 + e \Leftrightarrow e^x + x + \ln x - 1 - e = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
Παρατηρώ ότι $f(1) = e + 1 + 0 - 1 - e \Leftrightarrow f(1) = 0$, άρα η $x = 1$ είναι (προφανής) ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x + 3x^5 - 2$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση $2e^x + 3x^5 < 2$
- Να λύσετε την ανίσωση $2e^{x^2-2x} - 2e^{3x-6} > 3(3x-6)^5 - 3(x^2-2x)^5$

Λύση:

- $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^x + 15x^4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = \mathbb{R}$.
- $2e^x + 3x^5 < 2 \Leftrightarrow 2e^x + 3x^5 - 2 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$ (1)
Παρατηρώ ότι $f(0) = 2e^0 + 0 - 2 \Leftrightarrow f(0) = 0$, άρα από (1) έχω :
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x < 0$
- $2e^{x^2-2x} - 2e^{3x-6} > 3(3x-6)^5 - 3(x^2-2x)^5 \Leftrightarrow 2e^{x^2-2x} + 3(x^2-2x)^5 > 2e^{3x-6} + 3(3x-6)^5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2e^{x^2-2x} + 3(x^2-2x)^5 - 2 > 2e^{3x-6} + 3(3x-6)^5 - 2 \Leftrightarrow f(x^2-2x) > f(3x-6) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow}$
 $x^2-2x > 3x-6 \Leftrightarrow x^2-5x+6 > 0$, έχω $x^2-5x+6 = 0 \Leftrightarrow x = 2, \text{ ή } x = 3$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Επειδή θέλω $x^2-5x+6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3\ln x + 3$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3(\ln x + 1)}{x} = 4 - x$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^2 + 3x + \ln x - 7$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $4x^2 + 3x = 7 - \ln x$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 - 3x^2 + 3x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση $e^x > -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^7 - 1$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση $e^x > -x^7 + 1$.
- Να λύσετε την ανίσωση $e^{2x^2-3} - e^{x^2+2x} < (x^2+2x)^7 - (2x^2-3)^7$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{x} > 1 + \ln x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : Προβλήματα Ακρότατων

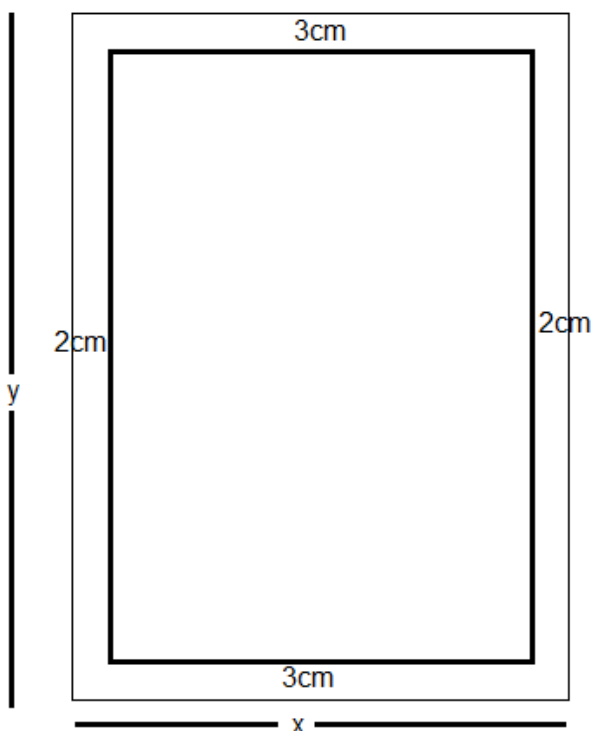
Για να υπολογίσουμε το μέγιστο ή το ελάχιστο ενός μεγέθους που περιγράφεται μέσα από πρόβλημα, ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

- Αν το πρόβλημα έχει γεωμετρική φύση, κατασκευάζουμε το σχήμα.
- βρίσκουμε τη συνάρτηση του μεγέθους που αναφέρεται το ακρότατο. Αν η συνάρτηση περιέχει δυο μεταβλητές, βρίσκουμε μια σχέση που τις συνδέει (από την εκφώνηση του προβλήματος ή από το σχήμα) και αντικαθιστούμε τη μια συνάρτηση της άλλης.
- Από την εκφώνηση του προβλήματος βρίσκουμε τους περιορισμούς στους οποίους υπόκειται η μεταβλητή, οι οποίοι καθορίζουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Τέλος κάνουμε μελέτη μονοτονίας και ακρότατων της συνάρτησης, απ' όπου προκύπτει και το αποτέλεσμα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

34. Θέλουμε να τυπώσουμε σελίδες εμβαδού 384cm^2 έτσι, ώστε τα περιθώρια του κειμένου να είναι 3cm πάνω και κάτω και 2cm δεξιά και αριστερά. Ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει κάθε σελίδα, ώστε το κείμενο να καταλαμβάνει τον μεγαλύτερο δυνατό χώρο της σελίδας.

Λύση :



Έστω ότι οι διαστάσεις της σελίδας είναι x, y . Τότε θα είναι

$$E_{\text{σελίδας}} = 384 \Leftrightarrow xy = 384 \Leftrightarrow y = \frac{384}{x} \quad (1)$$

Οι διαστάσεις του χώρου που καταλαμβάνει το κείμενο είναι $\text{μήκος} = x - 2 - 2 = x - 4$ και $\text{ύψος} = y - 3 - 3 = y - 6$. Άρα το εμβαδόν του χώρου που καταλαμβάνει το κείμενο είναι :

$E_{\text{κειμένου}} = (x - 4)(y - 6)$. Ψάχνουμε τις τιμές των x, y ώστε το $E_{\text{κειμένου}}$ να γίνεται μέγιστο.

$$E(x)_{\text{κειμένου}} \stackrel{(1)}{=} (x - 4) \left(\frac{384}{x} - 6 \right) = 384 - 6x - \frac{1536}{x} + 24 = 408 - 6x - \frac{1536}{x}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Το πεδίο ορισμού προκύπτει ως εξής : το μικρότερο μήκος x είναι $x_{\min} = 2 + 2 = 4$. Για να βρω τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το μήκος x θα πρέπει να λάβω υπόψη ότι $xy = 384 \Leftrightarrow y = \frac{384}{x}$. Άρα όσο μεγαλώνει το x τόσο μικραίνει το y . Άρα το μέγιστο x

το βρίσκω θέτοντας το μικρότερο y που είναι $y_{\min} = 3 + 3 = 6$. Άρα $6 = \frac{384}{x_{\max}} \Leftrightarrow x_{\max} = 64$.

Άρα $D_{E_{\text{κειμένου}}} = (4, 64)$

Θέλω να βρω τις τιμές του x για τις οποίες το $E(x)_{\text{κειμένου}}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

$$E'(x)_{\text{κειμένου}} = \left(408 - 6x - \frac{1536}{x} \right)' = -6 + \frac{1536}{x^2}, \quad E'(x)_{\text{κειμένου}} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{1536}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1536}{x^2} = 6 \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow x = 16, \text{ ή } x = -16 \text{ απορ.}$$

x	4	16	64
$E'(x)_{\text{κειμένου}}$	+	0	-
$E(x)_{\text{κειμένου}}$	γν. αύξουσα	Ο.Μ.	γν. φθίνουσα

$$E'(x)_{\text{κειμένου}} > 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{1536}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1536 - 6x^2}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2(1536 - 6x^2) > 0 \Leftrightarrow 1536 - 6x^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 256 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-16, 16)^*, \text{ όμως } D_{E_{\text{κειμένου}}} = (4, 64) \text{ άρα } x \in (4, 16)$$

$$E'(x)_{\text{κειμένου}} < 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{1536}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{1536 - 6x^2}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2(1536 - 6x^2) < 0 \Leftrightarrow 1536 - 6x^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 256 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -16) \cup (16, +\infty)^*, \text{ όμως } D_{E_{\text{κειμένου}}} = (4, 64) \text{ άρα } x \in (16, 64).$$

*Για την ανίσωση $256 - x^2 > 0$, έχω $256 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 16$

x	$-\infty$	-16	16	$+\infty$	
$256 - x^2$	-	0	+	0	-

Από το πινακάκι βλέπουμε ότι το $E(x)_{\text{κειμένου}}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν $x = 16$ την

$$E(16)_{\text{κειμένου}} = 408 - 6 \cdot 16 - \frac{1536}{6} = 216 \text{ cm}^2. \text{ Άρα οι ζητούμενες διαστάσεις είναι}$$

$$x = 16 \text{ cm και } y = \frac{384}{16} = 24 \text{ cm}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

35. Να βρείτε το σημείο της ευθείας $y = 3x - 2$ που είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

36. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ η εφαπτομένη έχει τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης;

37. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x \ln^2 x$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

38. Να βρείτε δυο αριθμούς x, y με σταθερό άθροισμα 10, που να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

39. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 400τ.μ να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου, που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.
40. Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 14μ να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου, που έχει την μικρότερη περίμετρο.
41. Ένα σύρμα μήκους 1m κόβεται σε δυο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε ένα κύκλο και ένα τετράγωνο. Να βρείτε τη πλευρά του τετραγώνου και τη διάμετρο του κύκλου, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δυο σχημάτων να είναι ελάχιστο.
42. Να βρείτε το σημείο της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ που έχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο A (1,0).
43. Να βρείτε το σημείο της καμπύλης $y = \sqrt{x-1}$ που έχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο A (2,0).
44. Να βρείτε το σημείο της καμπύλης $y = \sqrt{x^2+1}$ που έχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο A (3,0).
45. Το τυπωμένο κείμενο μιας σελίδας καταλαμβάνει επιφάνεια 432cm^2 . Τα περιθώρια της σελίδας πάνω και κάτω είναι 2 cm το καθένα και αυτά στα πλάγια της σελίδας 1,5cm το καθένα. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις της σελίδας ώστε να χρησιμοποιούμε τη μικρότερη ποσότητα χαρτιού;
46. Το ημερήσιο κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος ημερησίως δίνεται από τον τύπο $K(x) = 2x^3 + 3x^2 - 254x + 20$ χιλιάδες ευρώ, ενώ η είσπραξη από την πώληση τους δίνεται από τον τύπο $E(x) = x^3 + 60x^2 - 14x$ χιλιάδες ευρώ. Να βρεθεί η ημερήσια ποσότητα παραγωγής, ώστε το κέρδος να είναι μέγιστο.
47. Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιομηχανία που απασχολεί v εργάτες δίνεται από τον τύπο : $C(x) = x^3 - 6vx^2 + 7v^3$ σε μονάδες ευρώ, $x > 0$. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι 12- v δεκάδες ευρώ. Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.
48. Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιομηχανία που απασχολεί v εργάτες δίνεται από τον τύπο : $C(x) = x^3 - 9vx^2 + 5v^3$ σε δεκάδες ευρώ, $x > 0$. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι 10- v δεκάδες ευρώ. Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΣΤΟ 1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2001-2012

ΘΕΜΑ 2 (2^ο 2001)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x + \eta \mu x$.

A. Να αποδείξετε ότι $f'(x) + f''(x) = 0$. Μονάδες 8

B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$. Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3 (2^ο 2002)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$. Μονάδες 4

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f . Μονάδες 7

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x + 5$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3 (3^ο 2003)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

A. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

α. $\mathbb{R}$ **β.** $(-1,1)$ **γ.** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ **δ.** $(1, +\infty)$

Μονάδες 5

B. Να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.
Μονάδες 7

Γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)]$ Μονάδες 6

Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4 (2^ο 2004)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . Μονάδες 10

B. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ Μονάδες 15

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 5 (2^ο 2004Β')

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$.

- α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης. Μονάδες 9
- β. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x}$. Μονάδες 8
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 6 (4^ο 2005)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

- α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $\Lambda(1,1)$. Μονάδες 7
- β. Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες xx' και yy' , οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox , Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M , ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 7 (2^ο 2005 Β')

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x - \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . Μονάδες 3
- β. Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε x , το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Μονάδες 5
- γ. Να βρείτε τα α και β , ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $A(1,1)$ της γραφικής παράστασης της f να είναι $y=3x-2$. Μονάδες 10
- δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} (f'(x) \cdot x^3)$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 8 (2^ο 2006 Β')

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x (\alpha x^2 + \beta x + 9)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(2, e^2)$ είναι $y = -e^2 x + 3e^2$, τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-6$. Μονάδες 12
- β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f . Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 9 (2^ο 2007)

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = xe^x + 3$, όπου x πραγματικός αριθμός.

- α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f(x) + e^x - 3$. Μονάδες 10
- β. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$. Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 10 (2^ο 2008)

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

- α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$. Μονάδες 7
- β. Να αποδείξετε ότι $e^x f'(x) = 2 - x$. Μονάδες 9
- γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$. Μονάδες 9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 11 (4^ο 2008 Β')

Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1). Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x .



- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο $f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2$.
- β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματοπλέγμα των 200 m.

ΘΕΜΑ 12 (3^ο 2009)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$, $a \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι $a=9$
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$.

ΘΕΜΑ 13 (4^ο 2009)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

ΘΕΜΑ 14 (2^ο 2009 Β')

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 8$, $a \in \mathbb{R}$.

- Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -7$ να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$.
- Αν $a=1$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$.

ΘΕΜΑ 15 (4^ο 2009 Β')

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = v^3x + \frac{4}{x^2}$, $x \in (0,1)$, $v \in \mathbb{N}$ με $v > 2$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να δείξετε ότι $f(x) \geq 3v^2$ για κάθε $x \in (0,1)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 16 (2^ο 2010)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1, x \in \mathbb{R}$.

- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$
- Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.
- Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 17 (4^ο 2011)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}, x \in \mathbb{R}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονotonία.
- Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)}$. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = h(x)$.

ΘΕΜΑ 18 (2^ο 2011 Β´)

Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε $^{\circ}\text{C}$) σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου, προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t) = t - 4\sqrt{t} + a$, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $t \in (0, 24]$ ο χρόνος σε ώρες.

- Να αποδείξετε ότι για $t \in (0, 4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t \in (4, 24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται.
- Να υπολογίσετε την τιμή του a , αν γνωρίζουμε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι -1°C .
- Για $a=3$ να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της περιοχής είναι 0°C
- Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{\theta'(t)}{t^2 - 16}$.

ΘΕΜΑ 19 (4^ο 2012)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x}, x > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

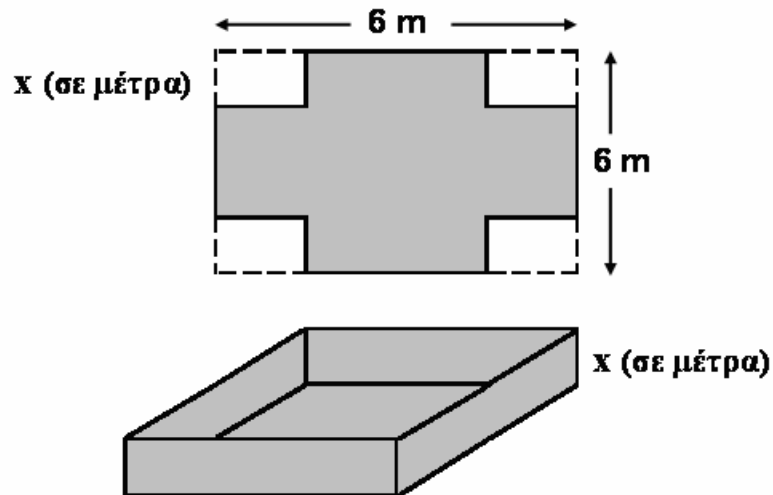
Δ2. Έστω $M(x, f(x))$, $x > 0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f . Η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $K(x, 0)$ και η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0, f(x))$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου $OKM\Lambda$ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Μονάδες 7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 20 (4^ο 2012Β')

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, $0 < x < 3$ και στη συνέχεια οι πλευρές της διπλώνονται προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι

$$f(x) = 4x(3-x)^2, \quad 0 < x < 3$$

(Δίνεται ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α , β , γ είναι $V = \alpha\beta\gamma$).

Μονάδες 4

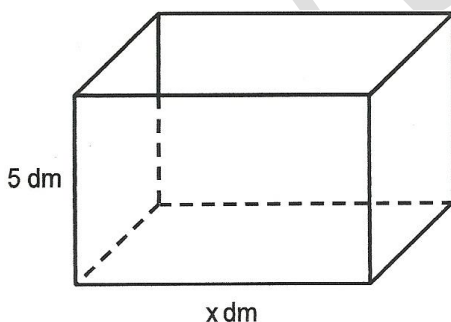
Δ2. Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο. **Μονάδες 6**

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2) - 8}{x}$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 21 (ΘΕΜΑ Δ 2014)

Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και ανοικτό από πάνω.



Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm.

Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μία πλευρά της είναι x dm με $0 < x < 10$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι

$$E(x) = -x^2 + 10x + 100, \quad x \in (0, 10)$$

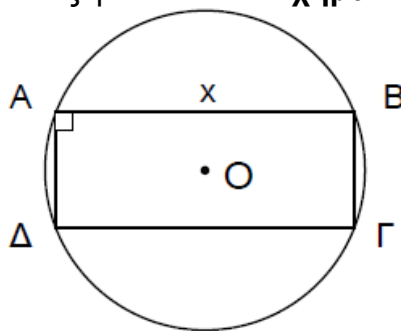
και να βρείτε για ποια τιμή του x το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια.

Μονάδες 8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 22 (ΘΕΜΑ Δ 2015)

Δίνεται κύκλος (O, ρ) με κέντρο O και ακτίνα $\rho=5$ και ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά $AB=x$, όπως φαίνεται στο **Σχήμα Ι**.



ΣΧΗΜΑ Ι

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$ **Μονάδες 4**

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του x , δείξτε ότι το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο. **Μονάδες 5**

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x}$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 23 (ΘΕΜΑ Β 2016)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f . **Μονάδες 9**

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$. **Μονάδες 8**

B3. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1}$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 24 (ΘΕΜΑ Β 2016B')

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

B1. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$, να βρείτε το α . **Μονάδες 4**

B2. Για $\alpha=3$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$. **Μονάδες 7**

B3. Για $\alpha=3$ να βρείτε τα ακρότατα της f . **Μονάδες 6**

B4. Για $\alpha=3$ να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$. **Μονάδες 8**