

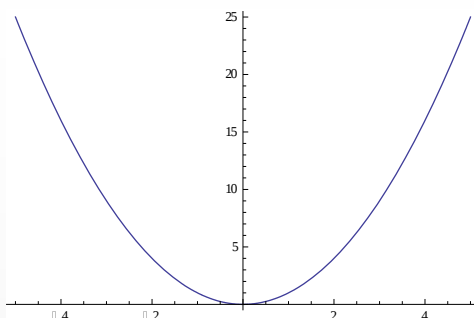
7.1 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$f(x) = ax^2$$

1. Μορφή της συνάρτησης $f(x) = x^2$

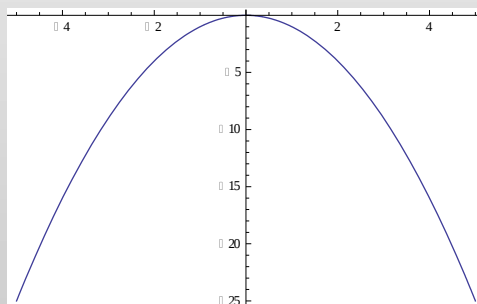
Ιδιότητες

- Έχει πεδίο ορισμού ολό το $\mathbb{R}$
- Είναι άρτια, άρα συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 0 = f(0)$, άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 0$
- Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $f(x) \rightarrow +\infty$ και όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $f(x) \rightarrow +\infty$

2. Μορφή της συνάρτησης $g(x) = -x^2$

Ιδιότητες

- Έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$
- Είναι άρτια, άρα συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \leq 0 = g(0)$, άρα παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $g(0) = 0$
- Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $g(x) \rightarrow -\infty$ και όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $g(x) \rightarrow -\infty$

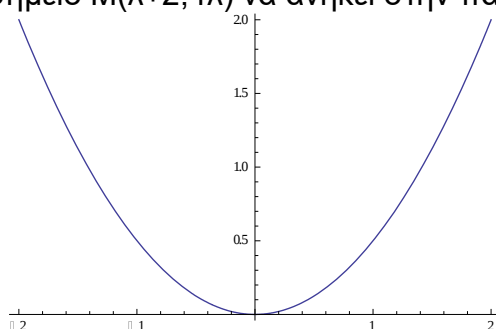
3. Μορφή της συνάρτησης $f(x) = ax^2$ (με $a \neq 0$ είναι παραβολή με κορυφή $O(0,0)$)

- Όταν $a > 0$: Είναι σαν τη x^2 , αλλά αλλάζει η καμπυλότητα. Όσο μεγαλώνει το a , τόσο η καμπύλη "κλίνει".
- Όταν $a < 0$: Είναι σαν τη $-x^2$, αλλά αλλάζει η καμπυλότητα. Όσο το a μικραίνει, τόσο η καμπύλη "κλίνει".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4 + ax^2}{x^2 - 4}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1,1)$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και την τιμή του a .
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

2. Δίνεται η παραβολή του παρακάτω σχήματος, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(2,2)$.
Να βρείτε:
- της εξίσωση της παραβολής
 - το σημείο της παραβολής με τετμημένη -4
 - τα σημεία της παραβολής με τεταγμένη 18
 - τον αριθμό λ , ώστε το σημείο $M(\lambda+2,4\lambda)$ να ανήκει στην παρακάτω παραβολή.



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x-6, & \alpha\nu \quad -6 \leq x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x^3, & \alpha\nu \quad -2 < x < 2 \\ -x+6, & \alpha\nu \quad 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- Να βρείτε τα ακρότατα της f .

4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} (x+a)^3, & \alpha\nu \quad x \leq 0 \\ -x^2+8, & \alpha\nu \quad x > 0 \end{cases}$ για την οποία ισχύει $f(f(3))=1$.

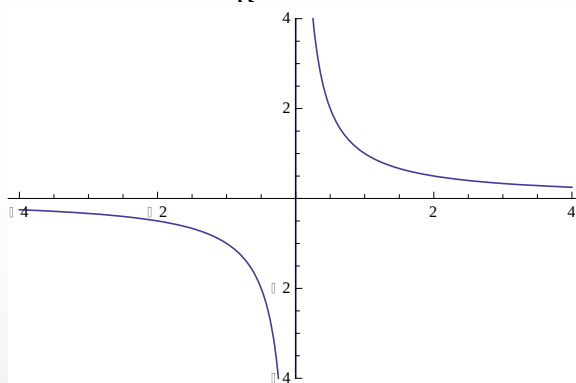
- Να βρείτε την τιμή του a .
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- Να βρείτε το σύνολο της f .

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ και έστω A, B τα σημεία της C_f με τετμημένες -2 και 4 αντίστοιχα.

- Να βρείτε τις τεταγμένες των A και B .
- Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B .
 - Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε
 - Να σχεδιάσετε τη C_f και την ευθεία ε στο ίδιο σύστημα αξόνων
- Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων να λύσετε την ανίσωση: $\frac{1}{2}x^2 < x+4$
- Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το παραπάνω συμπέρασμα.

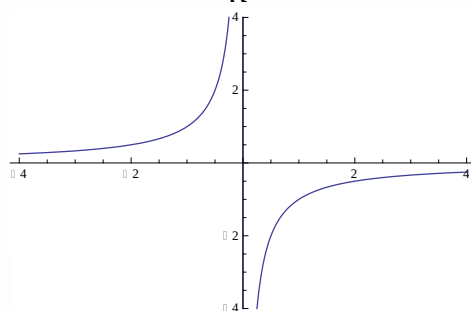
7.2 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$f(x) = \frac{\alpha}{x}$$

1. Μορφή της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ **Ιδιότητες**

- Έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Είναι περιττή, άρα συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων
- Είναι γν.φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και στο διάστημα $(0, +\infty)$
- Όταν $x \rightarrow 0$ από δεξιά, τότε $f(x) \rightarrow +\infty$. Οπότε ο άξονας $y'y$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g προς τα πάνω
- Όταν $x \rightarrow 0$ από αριστερά, τότε $f(x) \rightarrow -\infty$. Οπότε ο άξονας $y'y$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g προς τα κάτω
- Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $f(x) \rightarrow 0$. Οπότε ο άξονας $x'x$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_g προς τα αριστερά
- Όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $f(x) \rightarrow 0$. Οπότε ο άξονας $x'x$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_g προς τα δεξιά
- Έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες (διχοτόμους) $y = x$ και $y = -x$

2. Μορφή της συνάρτησης $g(x) = -\frac{1}{x}$



Ιδιότητες

- Έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Είναι περιττή, άρα συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων
- Είναι γν.αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και στο διάστημα $(0, +\infty)$
- Όταν $x \rightarrow 0$ από δεξιά, τότε $g(x) \rightarrow -\infty$. Οπότε ο άξονας $y'y$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g προς τα κάτω
- Όταν $x \rightarrow 0$ από αριστερά, τότε $g(x) \rightarrow +\infty$. Οπότε ο άξονας $y'y$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g προς τα πάνω
- Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $g(x) \rightarrow 0$. Οπότε ο άξονας $x'x$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_g προς τα αριστερά
- Όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $g(x) \rightarrow 0$. Οπότε ο άξονας $x'x$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_g προς τα δεξιά
- Έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες (διχοτόμους) $y = x$ και $y = -x$

3. Μορφή της συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$ (με $a \neq 0$ είναι ισοσκελής υπερβολή)

- Όταν $a > 0$: Είναι σαν την $\frac{1}{x}$, αλλά αλλάζει η καμπυλότητα . Όσο μεγαλώνει το a , τόσο η καμπύλη "ανοίγει".
- Όταν $a < 0$: Είναι σαν την $-\frac{1}{x}$, αλλά αλλάζει η καμπυλότητα . Όσο το a μικραίνει, τόσο η καμπύλη "ανοίγει".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \frac{a^2 + 3a + 4}{x}$ διέρχεται από το σημείο

$M(-1, a)$.

- Να βρείτε τον αριθμό a
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x, & \alpha \nu -2 \leq x < 1 \\ \frac{2}{x}, & \alpha \nu x \geq 1 \end{cases}$

- Να βρείτε το πεδίο της f .
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

iii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

3. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{αν } x \leq -1 \\ 2, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ \frac{2}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

- i. Να βρείτε το πεδίο της f και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης:
 - α) να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή
 - β) να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

4. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{|x|}, & \text{αν } |x| \geq 1 \\ -x^2, & \text{αν } |x| < 1 \end{cases}$$

- i. Να βρείτε το πεδίο της f και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης:
 - α) να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
 - β) να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax+a-3}{x-1}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από

το σημείο $M(2,3)$.

- i. Να βρείτε την τιμή του a .
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- iii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

7.3 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

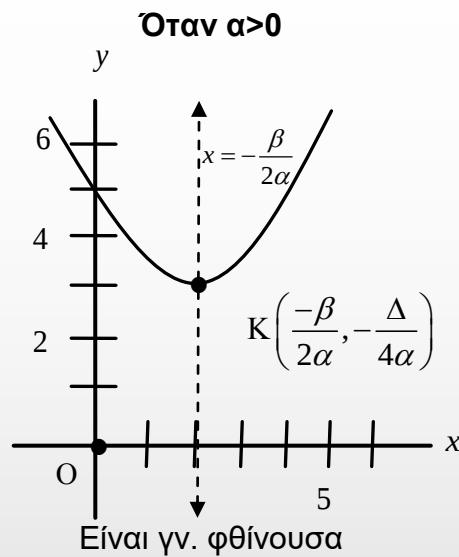
ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ (ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ)

1. Γενική μορφή του τριωνύμου : $f(x) = a \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}$.

2. Κορυφή : Η C_f είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο $K \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha} \right)$.

3. Συμμετρία : Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

4. Μονοτονία και ακρότατο : (Από τη γραφική παράσταση)

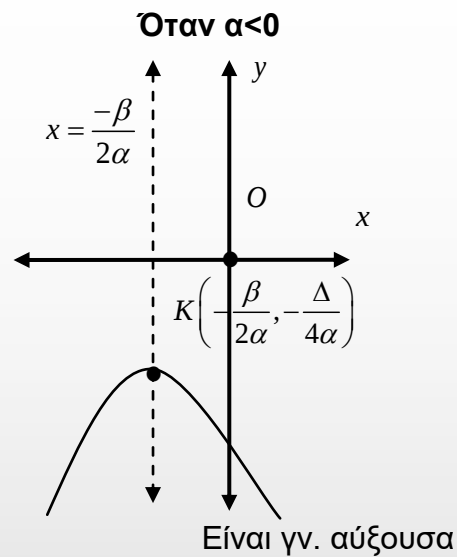


στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha} \right]$

και γν. αύξουσα

στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty \right)$

Ελάχιστο το $f \left(-\frac{\beta}{2\alpha} \right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$



στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha} \right]$

και γν. φθίνουσα

στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty \right)$

Μέγιστο, το $f \left(-\frac{\beta}{2\alpha} \right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

5. Κοινά σημεία με τους άξονες :

- Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, \gamma)$.
- Α) Όταν $\Delta > 0$, τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(x_1, 0)$ και $B(x_2, 0)$ όπου x_1, x_2 ρίζες του τριωνύμου.
Β) Όταν $\Delta = 0$, εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $A(\rho, 0)$, όπου $\rho = -\frac{\beta}{2\alpha}$ η διπλή ρίζα του τριωνύμου.
Γ) Όταν $\Delta < 0$, δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**1. Το πρόσημο του α**

- Όταν $\alpha > 0$, η παραβολή έχει ελάχιστο.
- Όταν $\alpha < 0$, η παραβολή έχει μέγιστο.
- Όταν $\alpha = 0$, δεν έχουμε παραβολή, αλλά ευθεία.

2. Ο αριθμός $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Εκφράζει την τετμημένη της κορυφής, δηλαδή το πόσο δεξιά ή αριστερά συμβαίνει το ακρότατο.

3. Ο αριθμός $-\frac{\Delta}{4\alpha}$

Εκφράζει την τεταγμένη της κορυφής, δηλαδή το πόσο πάνω ή κάτω συμβαίνει το ακρότατο.

4. Μέθοδος

Για να βρούμε το κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$, θέτουμε όπου x το 0.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.

5. Μέθοδος

Για να βρούμε παραβολή από δοσμένα στοιχεία της, θεωρούμε την παραβολή $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ και δημιουργούμε σύστημα με αγνώστους α, β, γ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

- Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f .
- Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

- Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f .
- Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

3. Η παραβολή $f(x) = \lambda x^2 + (\lambda + 2)x - 2(2\lambda - 1)$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$.

- Να βρείτε τον αριθμό λ .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 10$.

4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2 + (\lambda + 2)x - 2\lambda$ εφάπτεται στον άξονα

$x'x$. Να βρείτε:

- τον αριθμό λ
- τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2(\mu + 1)x + \nu$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη 1 και έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$.
- Να βρείτε τους αριθμούς μ και ν .
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 21$
6. Η παραβολή $f(x) = (\lambda + 1)x^2 + (\lambda^2 - 4\lambda - 9)x + 4\lambda$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 3$. Να βρείτε:
- τον αριθμό λ
 - την κορυφή της παραβολής.
7. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 40cm.
- Αν το μήκος του είναι x cm, να εκφράσετε συναρτήσει του x , το πλάτος και το εμβαδόν του ορθογωνίου.
 - Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο εμβαδόν.
8. Δίνεται η παραβολή: $f(x) = \mu x^2 + 2(\mu - 1)x + \mu - 1$, $\mu \neq 0$. Η κορυφή της παραβολής ανήκει στην ευθεία $y = 2x + 6$.
- Να βρείτε τον αριθμό μ .
 - Δίνεται και η συνάρτηση: $g(x) = -x^2 + 4\lambda^2 + 16\lambda - 10$. Να βρείτε για ποια τιμή του λ , το σημείο τομής των C_f και C_g έχει τη μεγαλύτερη τετμημένη.
9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = |x^2 + ax + 2a - 13|$ για την οποία ισχύει $f(-1) = f(-3)$.
- Να βρείτε την τιμή του a .
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του a .