

5.1 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Γενικά **ακολουθία πραγματικών αριθμών** είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται **πρώτος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε

συνήθως με α_1 , ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται **δεύτερος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_2 κ.λ.π. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός n καλείται **n -οστός ή γενικός όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_n .

➤ Σε μια ακολουθία ο πρώτος όρος είναι ο α_1 , εκτός και αν έχει οριστεί διαφορετικά, ενώ ο n -οστός όρος δεν είναι ο τελευταίος όρος, εκτός κι αν έχει έτσι οριστεί.

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 :** Προσδιορισμός όρων μιας ακολουθίας, όταν γνωρίζουμε τον γενικό της όρο.

Όταν γνωρίζουμε τον γενικό όρο μιας ακολουθίας, τότε για να βρούμε οποιονδήποτε όρο της α_k , αρκεί να θέσουμε $n = k$ στον τύπο της.

Αναδρομικός τύπος μιας ακολουθίας ονομάζεται μια σχέση που συνδέει δυο ή περισσότερους γενικούς όρους της ακολουθίας. Με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου μπορούμε να βρούμε οποιονδήποτε άλλο όρο της ακολουθίας. Για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά, απαιτείται να γνωρίζουμε:

- (i) Τον αναδρομικό της τύπο και
- (ii) Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :** Προσδιορισμός αναδρομικού τύπου ακολουθίας, όταν γνωρίζουμε τον γενικό όρο της.

Για να ορίσουμε αναδρομικά μια ακολουθία, συνήθως εργαζόμαστε ως εξής :

1^ο Βρίσκουμε τον όρο α_{n+1}

2^ο Προσπαθούμε να εκφράσουμε τον όρο α_{n+1} με τη βοήθεια του όρου α_n .

3^ο Βρίσκουμε όσους αρχικούς όρους χρειάζονται.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 124 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

- i) $\alpha_n = 2n + 1$ ii) $\alpha_n = 2^n$ iii) $\alpha_n = n^2 + n$

Λύση :

i) $\alpha_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $\alpha_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $\alpha_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $\alpha_4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$, $\alpha_5 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$

ii) $\alpha_1 = 2^1 = 2$, $\alpha_2 = 2^2 = 4$, $\alpha_3 = 2^3 = 8$, $\alpha_4 = 2^4 = 16$, $\alpha_5 = 2^5 = 32$

iii) $\alpha_1 = 1^2 + 1 = 2$, $\alpha_2 = 2^2 + 2 = 6$, $\alpha_3 = 3^2 + 3 = 12$, $\alpha_4 = 4^2 + 4 = 20$, $\alpha_5 = 5^2 + 5 = 30$

2. (Άσκηση 2 σελ. 124 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

i) $\alpha_1 = 2, \alpha_{v+1} = \frac{1}{\alpha_v}$ ii) $\alpha_1 = 0, \alpha_{v+1} = \alpha_v^2 + 1$

Λύση:

i) Από τον αναδρομικό τύπο $\alpha_{v+1} = \frac{1}{\alpha_v}$ για :

$$v = 1 \text{ έχω : } \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1} \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$v = 2 \text{ έχω : } \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \alpha_3 = 2$$

$$v = 3 \text{ έχω : } \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3} \Leftrightarrow \alpha_4 = \frac{1}{2}$$

$$v = 4 \text{ έχω : } \alpha_5 = \frac{1}{\alpha_4} \Leftrightarrow \alpha_5 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \alpha_5 = 2$$

ii) Από τον αναδρομικό τύπο $\alpha_{v+1} = \alpha_v^2 + 1$ για :

$$v = 1 \text{ έχω : } \alpha_2 = \alpha_1^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_2 = 1$$

$$v = 2 \text{ έχω : } \alpha_3 = \alpha_2^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_3 = 1^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_3 = 2$$

$$v = 3 \text{ έχω : } \alpha_4 = \alpha_3^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_4 = 2^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_4 = 5$$

$$v = 4 \text{ έχω : } \alpha_5 = \alpha_4^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_5 = 5^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_5 = 26$$

3. (Άσκηση 3 σελ. 124 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες :

i) $\alpha_v = v + 5$ ii) $\alpha_v = 2^v$ iv) $\alpha_v = 5v + 3$

Λύση:

i) $\alpha_1 = 1 + 5 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$

Για να βρω μια σχέση που να συνδέει τους όρους α_{v+1} και α_v , υπολογίζω τη διαφορά : $\alpha_{v+1} - \alpha_v = (v+1) + 5 - (v+5) = v+1+5-v-5 = 1$. Άρα

$\alpha_{v+1} - \alpha_v = 1 \Leftrightarrow \alpha_{v+1} = \alpha_v + 1$. Άρα η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής :

$$\boxed{\alpha_1 = 6} \text{ και } \boxed{\alpha_{v+1} = \alpha_v + 1}$$

ii) $\alpha_1 = 2^1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$

Για να βρω μια σχέση που να συνδέει τους όρους α_{v+1} και α_v , υπολογίζω το πηλίκο

$$: \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \frac{2^{v+1}}{2^v} = \frac{2^v \cdot 2}{2^v} = 2. \text{ Άρα } \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = 2 \Leftrightarrow \alpha_{v+1} = 2\alpha_v. \text{ Άρα η ακολουθία ορίζεται}$$

αναδρομικά ως εξής : $\boxed{\alpha_1 = 2}$ και $\boxed{\alpha_{v+1} = 2\alpha_v}$

iv) $\alpha_1 = 5 \cdot 1 + 3 \Leftrightarrow \alpha_1 = 8$

Για να βρω μια σχέση που να συνδέει τους όρους α_{v+1} και α_v , υπολογίζω τη διαφορά : $\alpha_{v+1} - \alpha_v = 5(v+1) + 3 - (5v+3) = 5v+5+3-5v-3 = 5$. Άρα

$\alpha_{v+1} - \alpha_v = 5 \Leftrightarrow \alpha_{v+1} = \alpha_v + 5$. Άρα η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής :

$$\boxed{\alpha_1 = 8} \text{ και } \boxed{\alpha_{v+1} = \alpha_v + 5}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

i. $\alpha_n = 3n + 2$ ii. $\alpha_n = 4n - 2$ iii. $\alpha_n = n^2 - 3n + 2$ iv. $\alpha_n = 2^{n-1}$

5. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες :

(ΑΠΟ ΓΕΝΙΚΟ ΤΥΠΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΣΕ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟ)

i. $\alpha_n = 2n + 3$ ii. $\alpha_n = 3 \cdot 2^n$ iii. $\alpha_n = 3n - 1$ iv. $\alpha_n = 3^n - 2$

v. $\alpha_n = 2n - 3$ vi. $\alpha_n = 2n \cdot 3^n$ vii. $\alpha_n = 3^n + 1$

6. Να βρείτε το n -οστό (γενικό) όρο των ακολουθιών :

(ΑΠΟ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟ ΤΥΠΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΣΕ ΓΕΝΙΚΟ)

i. $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 3$

ii. $\alpha_1 = 7$ και $\alpha_{n+1} = \alpha_n - 2$

iii. $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n$

iv. $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{n+1} = 3\alpha_n$

v. $\alpha_1 = 18$ και $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{3}$

7. Δίνεται η ακολουθία (α_n) με γενικό όρο $\alpha_n = 2n^2 - 4n$. Να βρείτε :

i. τους τέσσερις πρώτους όρους και τον 100° όρο της

ii. τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1}$.

5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

- Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της (από τον δεύτερο και μετά) προκύπτει από τον προηγούμενο του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού. Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με ω και τον λέμε **διαφορά της προόδου**. Έτσι ισχύουν : $\alpha_{v+1} = \alpha_v + \omega$ ή $\alpha_{v+1} - \alpha_v = \omega$

- Ο v -οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 :** Προσδιορισμός α_1 και ω μιας αριθμητικής προόδου όταν γνωρίζουμε στοιχεία για διάφορους όρους της.

Όταν έχουμε ως δεδομένα σχέσεις μεταξύ διαφόρων όρων μιας αριθμητικής προόδου α_v , τότε αντικαθιστούμε όλους τους όρους σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$. (Ασκήσεις 1 - 5 σχολικό βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 129,130)

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :** Αριθμητικός Μέσος

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει : $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$. Ο β λέγεται αριθμητικός μέσος των α και γ .

(Ασκήσεις 6 - 7 σχολικό βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 130)

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 :** Άθροισμα n διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Έστω α_v μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω . Το άθροισμα S_v των πρώτων n όρων της δίνεται από τον τύπο : $S_v = \frac{v}{2}(\alpha_1 + \alpha_v)$. Αν αντικαταστήσουμε το

$\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$, προκύπτει ο τύπος : $S_v = \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega]$

(Ασκήσεις 8 - 12 σχολικό βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 130)

Υποπερίπτωση : αν το άθροισμα είναι της μορφής : $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$ τότε αρχικά από τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$, υπολογίζω το v ή το α_v (ανάλογα με την εκφώνηση) και στη συνέχεια από τον τύπο $S_v = \frac{v}{2}(\alpha_1 + \alpha_v)$ υπολογίζω το ζητούμενο άθροισμα. (Άσκηση 10 Α΄ ομάδας σελ. 130, Ασκήσεις 2,3 Β΄ ομάδας σελ. 131)

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 :** Πως αποδεικνύουμε ότι μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, όταν γνωρίζουμε τον ν-οστό όρο της.

Για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία α_n είναι αριθμητική πρόοδος, όταν γνωρίζουμε τον γενικό όρο της α_n , εργαζόμαστε ως εξής :

1^ο Βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} , θέτοντας όπου ν το ν+1, στον τύπο του α_n

2^ο Υπολογίζουμε τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n$

3^ο Αν η παραπάνω διαφορά είναι σταθερός αριθμός (ανεξάρτητος του ν), τότε η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, με διαφορά ω ίση με τον σταθερό αυτό αριθμό.
(Άσκηση 1 Β΄ ομάδας σελ. 131)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 129 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1)**

Να βρείτε το ν-οστό όρο των αριθμητικών προόδων :

i. 7,10,13,... iii. 5,2,-1,... v. -6,-9,-12,...

Λύση :

i. Στην αριθμητική πρόοδο 7,10,13,... έχω : $\alpha_1 = 7$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 10 - 7 \Leftrightarrow \omega = 3$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_n = 7 + (n-1)3 \Leftrightarrow \alpha_n = 7 + 3n - 3 \Leftrightarrow \alpha_n = 3n + 4$$

iii. Στην αριθμητική πρόοδο 5,2,-1,... έχω : $\alpha_1 = 5$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 2 - 5 \Leftrightarrow \omega = -3$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_n = 5 + (n-1)(-3) \Leftrightarrow \alpha_n = 5 - 3n + 3 \Leftrightarrow \alpha_n = -3n + 8$$

v. Στην αριθμητική πρόοδο -6,-9,-12,... έχω :

$$\alpha_1 = -6 \text{ και } \omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = -9 + 6 \Leftrightarrow \omega = -3$$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_n = -6 + (n-1)(-3) \Leftrightarrow \alpha_n = -6 - 3n + 3 \Leftrightarrow \alpha_n = -3n - 3$$

2. (Άσκηση 2 σελ. 129 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1)**

Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμία από τις αριθμητικές προόδους :

i. τον α_{15} της -2,3,8,... vi. τον α_{47} της $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \dots$

Λύση :

i. Στην αριθμητική πρόοδο -2,3,8,... έχω : $\alpha_1 = -2$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 3 + 2 \Leftrightarrow \omega = 5$

$$\text{Άρα : } \alpha_{15} = \alpha_1 + (15-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_{15} = -2 + 14 \cdot 5 \Leftrightarrow \alpha_{15} = -2 + 14 \cdot 5 \Leftrightarrow \alpha_{15} = -2 + 70 \Leftrightarrow \alpha_{15} = 68$$

vi. Στην αριθμητική πρόοδο $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \dots$ έχω : $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \text{Άρα : } \alpha_{47} &= \alpha_1 + (47-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_{47} = \frac{1}{2} + 46 \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha_{47} = \frac{1}{2} + \frac{138}{4} \Leftrightarrow \alpha_{47} = \frac{1}{2} + \frac{69}{2} \Leftrightarrow \alpha_{47} = \frac{70}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_{47} = 35. \end{aligned}$$

3. (Άσκηση 6 σελ. 130 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2)**

i. Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των 10 και -40

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των $5x+1$ και 11 είναι ο $3x-2$.

Λύση :

i. Ο αριθμητικός μέσος των $\alpha = 10$ και $\gamma = -40$ είναι ο $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{10 - 40}{2} \Leftrightarrow \beta = -15$

ii. Οι αριθμοί $\alpha = 5x + 1$, $\beta = 3x - 2$ και $\gamma = 11$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει : $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Leftrightarrow 3x - 2 = \frac{5x + 1 + 11}{2} \Leftrightarrow 6x - 4 = 5x + 12 \Leftrightarrow x = 16$.

4. (Άσκηση 8 σελ. 130 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3)**

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων των αριθμητικών προόδων :

i. 7,9,11,...

Λύση :

i. Στην αριθμητική πρόοδο 7,9,11,... έχω : $\alpha_1 = 7$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 9 - 7 \Leftrightarrow \omega = 2$

$$\text{Άρα : } S_n = \frac{n}{2} [2\alpha_1 + (n-1)\omega] \Leftrightarrow S_{40} = \frac{40}{2} [2 \cdot 7 + (40-1)2] \Leftrightarrow S_{40} = 20(14 + 78) \Leftrightarrow S_{40} = 1840$$

5. (Άσκηση 10 σελ. 130 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 Υπο/πτώση)**

Να βρείτε τα αθροίσματα :

i. $1 + 5 + 9 + \dots + 197$

Λύση :

i. Οι αριθμοί 1,5,9,...,197 αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 5 - 1 \Leftrightarrow \omega = 4$. Είναι $\alpha_n = 197$ και ψάχνουμε το n.

Έτσι έχω : $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow 197 = 1 + (n-1)4 \Leftrightarrow 197 = 1 + 4n - 4 \Leftrightarrow 4n = 200 \Leftrightarrow n = 50$

$$\text{Άρα : } S_n = \frac{n}{2} (\alpha_1 + \alpha_n) \Leftrightarrow S_{50} = \frac{50}{2} (1 + 197) \Leftrightarrow S_{50} = 25 \cdot 198 \Leftrightarrow S_{50} = 4950.$$

(Εναλλακτικά θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω και τον άλλο τύπο του αθροίσματος :

$$S_{50} = \frac{50}{2} [2\alpha_1 + (50-1)\omega] \Leftrightarrow S_{50} = 25(2 \cdot 1 + 49 \cdot 4) \Leftrightarrow S_{50} = 25 \cdot 198 \Leftrightarrow S_{50} = 4950)$$

6. (Άσκηση 1 σελ. 131 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4)**

Ο n-ος όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 12 - 4n$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή

είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω .

Λύση :

Αρχικά βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} , θέτοντας όπου n το n+1, στον τύπο του α_n δηλαδή :

$$\alpha_{n+1} = 12 - 4(n+1) \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = 12 - 4n - 4 \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = 8 - 4n.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n = 8 - 4n - (12 - 4n) = 8 - 4n - 12 + 4n = -4$

Η διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n = -4$ είναι δηλαδή σταθερός αριθμός άρα η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = -4$ και πρώτο όρο :

$$\alpha_n = 12 - 4n \stackrel{n=1}{\Leftrightarrow} \alpha_1 = 12 - 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 8.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

7. Να βρείτε το 31^ο όρο των αριθμητικών προόδων :

i. 1,4,7,... ii. -9,-5,-1,... iii. 7,5,3,...

8. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. Να βρείτε :

- i. τον 10^ο όρο της προόδου,
- ii. ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 62.

9. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = -15$ και $\alpha_7 = 9$. Να βρείτε :
- τη διαφορά ω της προόδου
 - τον 11^ο όρο της προόδου,
 - ποιος ορος της προόδου είναι ισος με 41.
10. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_8 = -3$ και $\omega = -2$. Να βρείτε :
- τον πρώτο όρο της προόδου
 - τον 19^ο όρο της προόδου,
 - ποιος ορος της προόδου είναι ισος με -40.
11. Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών :
- 5 και 37
 - 3 και 23
 - 31 και -3
12. Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των $2x+1$ και $7x+2$ είναι ο 15.
13. Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$, οι αριθμοί : $x+5$, $3x-5$, $2x+6$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
14. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = -14$ και $\omega = 3$. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 20 όρων της προόδου.
15. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου :
- 3,5,7,...
 - 8,-3,2,...
 - 2,-1,-4,...
16. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :
- $1+4+7+\dots+94$
 - $3+7+11+\dots+119$
 - $-5-1+3+7+\dots+135$
17. i. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) και έστω S_n, S_{2n} και S_{3n} τα αθροίσματα των πρώτων $n, 2n$ και $3n$ όρων της αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$
- ii. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύει: $\alpha_{41} + \alpha_{42} + \dots + \alpha_{80} = 2010$. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 120 όρων της.
18. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_6=8$ και $\alpha_{11}=23$. Να βρείτε:
- Τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου
 - Πόσοι πρώτοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα 14
 - Το άθροισμα $S = a_{15} + a_{16} + \dots + a_{25}$
 - Το άθροισμα $S_1 = a_1 + a_3 + \dots + a_{39}$
19. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 50 θετικών πολλαπλασίων του 3.
20. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 θετικών πολλαπλασίων του 5.
21. Να βρείτε το άθροισμα :
- των άρτιων αριθμών μεταξύ 21 και 153
 - των περιπλών αριθμών μεταξύ 10 και 170
 - των πολλαπλασίων του 3 μεταξύ 40 και 200
 - των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 31 και 206.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα : **5.1 – 5.2 Ακολουθίες – Αριθμητική πρόοδος**

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14476

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7,...

α)

- i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου. (Μονάδες 4)
- ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 .
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 14512

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$. (Μονάδες 9)

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

- i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω . (Μονάδες 9)
- ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_n) . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3 14573

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$. (Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4 14574

Ο 1^{ος} όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) ισούται με 2 και ο 3^{ος} όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5 14597

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς. (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 6 14259

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται οι δυο πρώτοι όροι, $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 7$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο 20^{ος} όρος της προόδου ισούται με 97. (Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $2 + 7 + 12 + \dots + 97$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 7 36897

- α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1, 2, 3, \dots, n$.
(Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε πόσοι από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους έχουν άθροισμα 45.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 8 35375

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.
(Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τον α_{20} .
(Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.
(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 9 35408

Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$, είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_n) .

- α) Να βρείτε την τιμή του x .
(Μονάδες 10)
- β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_n) .
i. να υπολογίσετε τη διαφορά ω .
(Μονάδες 7)
- ii. να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.
(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 10 35299

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

- α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς.
(Μονάδες 9)
- β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;
(Μονάδες 8)
- γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;
(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 11 35143

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.
(Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστος όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_n = 2n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 12 35046

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

- α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.
(Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13 34877

- α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1).
(Μονάδες 13)
- β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 14 34871

- α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x , ώστε οι αριθμοί $x + 2$, $x + 1$, $3x + 2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
(Μονάδες 13)
- β) Για $x = -1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 15 34158

Σε αριθμητική πρόοδο (αν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 3. (Μονάδες 12)
 β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (αν) πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.
 (Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$). (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 16 34153

Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω .

- α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega=4$. (Μονάδες 12)
 β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 17 34147

Σε αριθμητική πρόοδο (αν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 12)
 β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 18 34145

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (αν) με διαφορά ω .

- α) Να δείξετε ότι: $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$. (Μονάδες 13)
 β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 19 14656

Σε μία αριθμητική πρόοδο (αν) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. (Μονάδες 12)
 β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$. (Μονάδες 13)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 20 12809

Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ...

- α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_n) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της. (Μονάδες 6)
 β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23^η φορά το γράμμα Β. (Μονάδες 10)
 γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200^η θέση στην παραπάνω διαδοχή. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 21 12945

Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. (Μονάδες 7)
 β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο. (Μονάδες 8)
 γ) Αν το άθροισμα των $2n$ πρώτων όρων της (α_n) είναι ίσο με το άθροισμα των n πρώτων όρων της (β_n) να βρείτε τον αριθμό n . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 22 14758

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

- α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου; (Μονάδες 6)
 β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 6)
 γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια; (Μονάδες 6)
 δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο; (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 23 13171

Το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_n) είναι

$$S_n = 2n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}^*$$

- α) Να αποδείξετε ότι $S_{n-1} = 2n^2 - n - 1$, $n \geq 2$ (Μονάδες 6)
 β) Να αποδείξετε ότι $a_n = 4n + 1$, $n \geq 1$ (Μονάδες 7)
 γ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω και τον πρώτο όρο α_1 . (Μονάδες 7)
 δ) Να αποδείξετε ότι αν $p \in \mathbb{N}^*$, τότε όλοι οι όροι της μορφής $a_{p(p+1)}$ είναι τέλεια τετράγωνα περιττών φυσικών αριθμών. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 24 14927

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_n) .

- α) Να δείξετε ότι το κόστος για n καλεσμένους είναι $\alpha_n = 107n + 1210$. (1) (Μονάδες 9)
 β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία
 i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1). (Μονάδες 5)
 ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 5)
 γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 25 13056

Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

.	. .	. . .		...
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_v = \frac{v(v+1)}{2}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

- α) Να βρείτε τον 10^ο τριγωνικό αριθμό. (Μονάδες 6)
 β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός. (Μονάδες 9)
 γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 26 13089

Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ! Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

- α)
 i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_v) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_v , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)
 ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_v) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_v , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)
 β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο. (Μονάδες 7)
 γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο. (Μονάδες 5)
 δ) Να δείξετε ότι $\alpha_v = \beta_{8-v}$ για κάθε $v = 1, 2, \dots, 7$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 27 13173

Δίνεται η ακολουθία (α_v) με γενικό τύπο $\alpha_v = 10 + 3v$.

- α)
 i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_v) είναι αριθμητική πρόοδος. (Μονάδες 6)
 ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 3)
 β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_v) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί; (Μονάδες 8)
 γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 28 12764

Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν a_n το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι a_n είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και τη διαφορά ω .

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

(Μονάδες 9)

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 29 12694

Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 3 + 4)

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

(Μονάδες 6)

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 30 37204

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1^η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

(Μονάδες 05)

β) Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου.

(Μονάδες 04)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

(Μονάδες 05)

δ) Αν στην 1^η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2^η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2^η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i. Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 31 36674

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

- α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)
 β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)
 γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
 δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 32 36662

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμία από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

- α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)
 β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)
 γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7^η μέχρι και την 14^η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 33 36660

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

- α) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)
 β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20^η κυψέλη; (Μονάδες 6)
 γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη συλλέγει το μέλι, από μια κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει στην αποθήκη Α.
 i. Ποια είναι η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3^η κυψέλη; (Μονάδες 6)
 ii. Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 34 36653

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ της οποίας οι τρεις πρώτοι όροι είναι:

$$\alpha_1 = x, \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4, \alpha_3 = x^2 - 2, \text{ με } x \text{ ακέραιο.}$$

- α) Να αποδείξετε ότι $x = 3$. (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να είναι ίσος με 2014. (Μονάδες 8)
 γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{15}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 35 36650

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21€ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει την πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης να πληρώνει 0,5€ περισσότερα από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε πόσο θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης. (Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $n \leq 51$ ο αριθμός a_n εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο n -οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51^{ος} επιβάτης. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο.

(Δίνεται: $\sqrt{10201} = 101$)

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 36 33858

Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_2 = \kappa^2$ και $a_3 = (\kappa + 1)^2$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός. (Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $a_1 = 2$, τότε:

i. Να βρείτε την τιμή του κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$. (Μονάδες 8)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 72 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 37 33583

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_3 = 10$ και $a_{20} = 61$.

α) Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $a_1 = 4$ και η διαφορά είναι $\omega = 3$. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (a_n) ,

τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 38 33581

Σε μια αριθμητική πρόοδο (a_n) , ο 3^{ος} όρος είναι $a_3 = 8$ και ο 8^{ος} όρος είναι $a_8 = 23$.

α) Να βρείτε τον 1^ο όρο a_1 και τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 9)

Αν $a_1 = 2$ και $\omega = 3$,

β) Να υπολογίσετε τον 31^ο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + (a_3 + 3) + \dots + (a_{31} + 31)$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 39 33579

Οι αριθμοί : $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x . (Μονάδες 6)

β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4^{ος} όρος της προόδου, να βρείτε:

i. Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii. Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

iii. Το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \dots + \alpha_{24}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 40 32741

Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας, η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλευέται τον Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x + 3$ σειρές με $x - 3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές. (Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν , δηλαδή πόσες ομάδες θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

- Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της (από τον δεύτερο και μετά) προκύπτει από τον προηγούμενο του με πολλαπλασιασμό επί του ίδιου πάντοτε αριθμού. Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με λ και τον λέμε **λόγος της**

πρόοδου. Έτσι ισχύουν : $\alpha_{v+1} = \alpha_v \cdot \lambda$ ή $\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \lambda$

- Ο n -οστός όρος μιας γεωμετρικής πρόοδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι

$$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$$

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 :** Προσδιορισμός α_1 και λ μιας γεωμετρικής πρόοδου όταν γνωρίζουμε στοιχεία για διάφορους όρους της.

Όταν έχουμε ως δεδομένα σχέσεις μεταξύ διαφόρων όρων μιας γεωμετρικής πρόοδου α_v , τότε αντικαθιστούμε όλους τους όρους σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$. Στη συνέχεια συνήθως διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν. (Ασκήσεις 1 - 7 σχ. βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 136 - 137)

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :** Γεωμετρικός Μέσος

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής πρόοδου, αν και μόνο αν ισχύει : $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$. Ο β λέγεται γεωμετρικός μέσος των α και γ (Πρέπει να είναι πάντα θετικός αριθμός).

(Άσκηση 8 σχ. βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 137, Άσκηση 2 σχ. βιβλίο Β΄ ομάδας σελ. 138)

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 :** Άθροισμα n διαδοχικών όρων γεωμετρικής πρόοδου

Έστω α_v μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda \neq 0$. Το άθροισμα S_v των πρώτων n

όρων της δίνεται από τον τύπο : $S_v = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}$. Αν αντικαταστήσουμε το

$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$, προκύπτει ο τύπος : $S_v = \frac{\alpha_v \cdot \lambda - \alpha_1}{\lambda - 1}$. Με τον τύπο αυτό υπολογίζουμε

το άθροισμα των πρώτων n - όρων μιας γεωμετρικής πρόοδου, χωρίς να γνωρίζουμε το πλήθος αυτών, αρκεί να γνωρίζουμε τα $\alpha_v, \alpha_1, \lambda$

(Ασκήσεις 9 - 10 σχ. βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 138)

Υποπερίπτωση : αν το άθροισμα είναι της μορφής : $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$ τότε αρχικά από τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$, υπολογίζω το v ή το α_v (ανάλογα με την εκφώνηση) και στη

συνέχεια από τον τύπο $S_v = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}$ υπολογίζω το ζητούμενο άθροισμα. (Άσκηση

11 Α΄ ομάδας σελ. 138)

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 :** Πως αποδεικνύουμε ότι μια ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος, όταν γνωρίζουμε τον ν-οστό όρο της.

Για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία α_n είναι γεωμετρική πρόοδος, όταν γνωρίζουμε τον γενικό όρο της α_n , εργαζόμαστε ως εξής :

1^{ov} Βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} , θέτοντας όπου ν το ν+1, στον τύπο του α_n

2^{ov} Υπολογίζουμε το πηλίκο $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$

3^{ov} Αν το παραπάνω πηλίκο είναι σταθερός αριθμός (ανεξάρτητος του ν), τότε η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος, με λόγο λ ίσο με τον σταθερό αυτό αριθμό.
(Άσκηση 1 Β΄ ομάδας σελ. 138)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 136 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1)**

Να βρείτε το ν-οστό όρο των γεωμετρικών προόδων :

- i. 3,6,12,... ii. $\frac{2}{3}, 2, 6, \dots$ vi. 18,6,2,...

Λύση :

i. Στην γεωμετρική πρόοδο 3,6,12,... έχω : $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \lambda = 2$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

ii. Στην γεωμετρική πρόοδο $\frac{2}{3}, 2, 6, \dots$ έχω : $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \lambda = 3$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{2}{3} \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = 2 \cdot 3^{n-2}$$

vi. Στην γεωμετρική πρόοδο 18,6,2,... έχω : $\alpha_1 = 18$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{18} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = 2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{2}{3^{n-3}}$$

2. (Άσκηση 2 σελ. 137 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1)**

Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμία από τις γεωμετρικές προόδους :

- i. τον α_9 της $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$ iv. τον α_{10} της 1, -2, 4, ...

Λύση :

i. Στην γεωμετρική πρόοδο $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$ έχω : $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \lambda = 2$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_9 = \frac{1}{4} \cdot 2^{9-1} \Leftrightarrow \alpha_9 = \frac{1}{2^2} \cdot 2^8 \Leftrightarrow \alpha_9 = 2^6 \Leftrightarrow \alpha_9 = 2^6 \Leftrightarrow \alpha_9 = 64$$

iv. Στην γεωμετρική πρόοδο 1, -2, 4, ... έχω : $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2}{1} \Leftrightarrow \lambda = -2$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_{10} = 1 \cdot (-2)^{10-1} \Leftrightarrow \alpha_{10} = (-2)^9 \Leftrightarrow \alpha_{10} = -512$$

3. (Άσκηση 8 σελ. 137 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2)**

i. Να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών 5 και 20 καθώς και των $\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\sqrt{3}$.

ii. Να βρείτε τον x ώστε οι αριθμοί $x-4$, $x+1$, $x-19$ να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

Λύση:

i. Ο γεωμετρικός μέσος των $\alpha = 5$ και $\gamma = 20$ είναι ο $\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta^2 = 5 \cdot 20 \Leftrightarrow \beta^2 = 100 \Leftrightarrow \beta = 10$

Ο γεωμετρικός μέσος των $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\gamma = \sqrt{3}$ είναι ο $\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow$

$$\beta^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$$

ii. Οι αριθμοί $\alpha = x-4$, $\beta = x+1$ και $\gamma = x-19$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει: $\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-4)(x-19) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 19x - 4x + 76 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 25x = 75 \Leftrightarrow x = 3$.

4. (Άσκηση 9 σελ. 137 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3)**

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων των γεωμετρικών προόδων:

i. 1,2,4,...

Λύση:

i. Στην γεωμετρική πρόοδο 1,2,4,... έχω: $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{1} \Leftrightarrow \lambda = 2$

$$\text{Άρα: } S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \Leftrightarrow S_{10} = \frac{1024 - 1}{1} \Leftrightarrow S_{10} = 1023$$

5. (Άσκηση 10 σελ. 138 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 Υπο/πτώση)**

Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

i. $2 + 8 + 32 + \dots + 8192$

Λύση:

i. Οι αριθμοί 2,8,32,...,8192 αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{2} \Leftrightarrow \lambda = 4$. Είναι $\alpha_n = 8192$ και ψάχνουμε το n .

$$\text{Έτσι έχω: } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow 8192 = 2 \cdot 4^{n-1} \Leftrightarrow 4^{n-1} = 4096 \Leftrightarrow 4^{n-1} = 4^6 \Leftrightarrow n-1 = 6 \Leftrightarrow n = 7$$

$$\text{Άρα: } S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S_7 = 2 \cdot \frac{4^7 - 1}{4 - 1} \Leftrightarrow S_7 = 2 \cdot \frac{16384 - 1}{3} \Leftrightarrow S_7 = 10922$$

(Εναλλακτικά θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω και τον άλλο τύπο του αθροίσματος:

$$S_n = \frac{\alpha_n \cdot \lambda - \alpha_1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S_7 = \frac{8192 \cdot 4 - 2}{4 - 1} \Leftrightarrow S_7 = 10922)$$

6. (Άσκηση 1 σελ. 138 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4)**

Ο n -ος όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 2^n \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή

είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους α_1 και λ .

Λύση:

Αρχικά βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} , θέτοντας όπου n το $n+1$, στον τύπο του α_n δηλαδή:

$$\alpha_{n+1} = 2^{n+1} \cdot \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το λόγο :
$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu}} = \frac{\frac{2^{\nu+1}}{3^{\nu+2}}}{\frac{2^{\nu}}{3^{\nu+1}}} = \frac{2^{\nu} \cdot 2 \cdot 3^{\nu} \cdot 3}{2^{\nu} \cdot 3^{\nu} \cdot 3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Ο λόγος $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu}} = \frac{2}{3}$ είναι δηλαδή σταθερός αριθμός άρα η ακολουθία (α_{ν}) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = \frac{2}{3}$ και πρώτο όρο : $\alpha_{\nu} = 2^{\nu} \cdot \frac{1}{3^{\nu+1}} \Leftrightarrow \alpha_1 = 2^1 \cdot \frac{1}{3^{1+1}} \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{2}{9}.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

7. Να βρείτε το 8^ο όρο των παρακάτω γεωμετρικών προόδων :

i. 1,2,4,... ii. 32,16,8,... iii. $\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, \dots$ iv. $\frac{27}{8}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, \dots$

8. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_{ν}) είναι $\alpha_1 = \frac{3}{4}$ και $\lambda = 2$. Να βρείτε :

i. τον 8^ο όρο της (α_{ν}) ii. ποιος ορος της (α_{ν}) είναι ισος με 12.

9. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_{ν}) είναι $\alpha_1 = \frac{2}{9}$ και $\alpha_4 = 6$. Να βρείτε :

i. τον λόγο λ της (α_{ν}) ii. τον 6^ο όρο της (α_{ν})

10. Οι αριθμοί 2, x, 8 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε το x.

11. Ο αριθμός 6 είναι ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών $x-3$ και $2x+8$. Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός x.

12. Οι αριθμοί $x-2$, $2x-2$, $4x+4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε το x.

13. Οι αριθμοί 2, $x-1$, x^2+2x-3 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός x.

14. Οι αριθμοί $x-6$, $x-2$, $2x+2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

i. Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός x.

ii. Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του x που βρήκατε στο i. να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών x και 50.

15. Να βρείτε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου : 4,12,36,...

16. Να βρείτε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου : 192,96,48,...

17. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα : i. $5+10+20+\dots+640$ ii. $4-8+16-\dots-8192$

18. Δίνεται γεωμ. πρόοδος για την οποία ισχύει $\frac{S_{10}}{S_5} = 33$. Να βρείτε:

i. τον λόγο λ της (α_{ν}) ii. το πηλίκο $\frac{S_6}{a_6}.$

19. Ο n -ος όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 2^{n+2} \cdot \frac{1}{3^n}$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους α_1 και λ .

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΡΟΟΔΟΥΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

- Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο : $\alpha_n = 2n - 11$.
 - να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος και έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = -9$ και διαφορά $\omega = 2$.
 - Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_{12} + \alpha_{13} + \dots + \alpha_{21}$, όπου $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{21}$ είναι διαδοχικοί όροι της προόδου α_n .
 - Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης : $|x^2 - 2x - 1| = 2$ είναι διαδοχικοί όροι της προηγούμενης προόδου α_n .
- Δίνεται αριθμητική πρόοδος α_n , της οποίας ο 13^{ος} όρος είναι -32 και το άθροισμα των πρώτων 8 όρων της είναι 84.
 - Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της αριθμητικής προόδου α_n .
 - Να λύσετε την εξίσωση $x^4 + \alpha_7 x^2 = \alpha_5$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x^3 + \alpha_{12}}{x^2 - 5x - S_{12}} \geq 0$
- Οι αριθμοί $x - 4$, $x + 4$, $3x - 4$ με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου α_n .
 - Να βρείτε την τιμή του x
Αν ο αριθμός $x - 4$, είναι ο πέμπτος όρος της αριθμητικής προόδου α_n , να βρείτε :
 - τον α_1 και τη διαφορά ω της α_n
 - το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της α_n
 - ποιος όρος της α_n είναι ίσος με 100
 - το πλήθος των πρώτων όρων της α_n που έχουν άθροισμα 80.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

- Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x + 2\lambda - 12 = 0$ (1)
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ , οι αριθμοί :
 $-x_1 x_2$, $x_1 + x_2$, $\frac{1}{2}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.
- Σε μια γεωμετρική πρόοδο α_n ο τρίτος όρος είναι ίσος με 16 και ο έκτος όρος είναι ίσος με 2. Να βρείτε :
 - τον πρώτο όρο και τον λόγο της α_n
 - τον δέκατο όρο της α_n
 - το άθροισμα των πρώτων 6 όρων της α_n
 - τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών α_8 και $\alpha_1 + \alpha_4$

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :

5.3 Γεωμετρική πρόοδος

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 12763

Δίνεται μία πρόοδος α_n με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

- α) Να εξετάσετε αν η α_n είναι αριθμητική πρόοδος. (Μονάδες 12)
 β) Να αποδείξετε ότι η α_n είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 12787

- α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$. (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k - 2, k, 2k + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3 14920

Μια γεωμετρική πρόοδος (α_n) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$, λόγο $\lambda > 0$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$. (Μονάδες 9)
 β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου. (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 36891

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_n) με θετικό λόγο λ , για την οποία ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

- α) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)
 β) Να δείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_n = 2^{n-3}$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 5 35205

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x, 2x+1, 5x+4$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

- i. $x = 1$
 ii. $x = -1$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 6 35042

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x + 4, 2 - x, 6 - x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

- i. το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)
 ii. τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 7 34874

α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (1). (Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 8 34156

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) , για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

- α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. (Μονάδες 10)
 β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 . (Μονάδες 15)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 9 12731

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός. (Μονάδες 10)
 γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda$, ($\kappa > 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$) είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$ να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 10 12998

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_n) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)
 ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$. (Μονάδες 5)
 β) Αν $a_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο n -οστός όρος της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)
 γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_n) είναι ίσο με $\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 11 33891

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν:

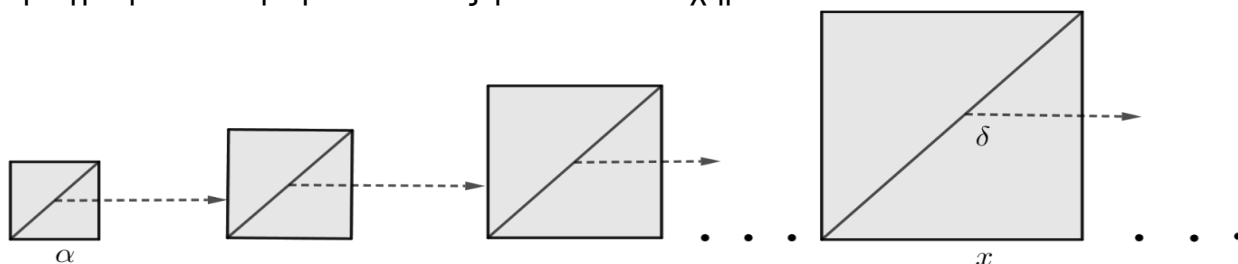
$$\alpha_3 = 4, \alpha_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0.$$

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n) . (Μονάδες 9)
 γ) Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_n) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_n) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}. \quad (\text{Μονάδες 8})$$

ΘΕΜΑ 12 14645

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α , σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



- α)
- Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x , να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$. (Μονάδες 4)
 - Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_n) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_n = \alpha^2 2^{n-1}$. (Μονάδες 7)
- β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:
- την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου. (Μονάδες 8)
 - το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 13 37205

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στη θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1^{ης} ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2^{ης} ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3^{ης} ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

- α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5^{ης} ημέρας μετά από το ατύχημα. (Μονάδες 7)
- β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.; (Μονάδες 9)
- γ) Στο τέλος της 9^{ης} ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 14 36649

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες υπάρχουν 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

- α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (Μονάδες 6)
- β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).
- Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της. (Μονάδες 6)
 - Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n . (Μονάδες 6)
 - Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15 36677

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) Να βρείτε

i) το ποσό α_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον n^o (νιοστό) μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 4)

ii) το ποσό β_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον n^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)

iii) το ποσό A_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 5)

iv) το ποσό B_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 5)

β)

i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 16 34180

Δίνονται οι αριθμοί $2, x, 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τον αριθμό x , ώστε οι $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; (Μονάδες 7)

γ) Αν (α_n) είναι η αριθμητική πρόοδος $2, 5, 8, 11, \dots$ και (β_n) η γεωμετρική πρόοδος $2, 4, 8, 16, \dots$, τότε να βρείτε:

i. Το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) . (Μονάδες 5)

ii. Την τιμή του n , ώστε για το άθροισμα S_n του γι) ερωτήματος να ισχύει:

$$2 \cdot (S_n + 24) = \beta_7. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

ΘΕΜΑ 17 34181

Δίνεται ορθογώνιο μήκους α , πλάτους β και εμβαδού E . Οι αριθμοί α, E, β , με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E . (Μονάδες 10)

β) Αν $E=1$ και $\alpha + \beta = 10$,

i. να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ou} βαθμού με ρίζες α και β . (Μονάδες 5)

ii. να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου. (Μονάδες 10)