ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^o : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω Α ένα υποσύνολο του $\Re$. Τι ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α ;**

Απάντηση : **(2005 ΕΣΠ. Β΄)**

Έστω Α ένα υποσύνολο του $\Re$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in \mathrm{A}$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(x)}$.

Σχόλια :

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε: $f : \mathrm{A} \to \Re$, $x \to f(x)$.

- Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με $\boldsymbol{D_f}$.
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in \mathrm{A}$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(A)}$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{ y \mid y = f(x) \ \text{ για κάποιο } \ x \in A \}.$$

2. Τι λέμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

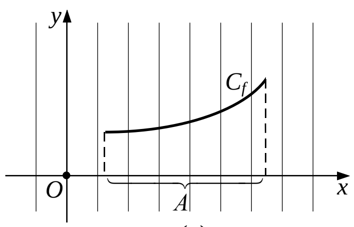
Απάντηση :

Γραφική παράσταση της f λέμε το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,f(x))$, με $x \in A$.

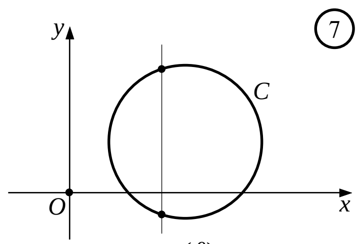
Σχόλια :

- Η γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.
- Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.
- Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \Re$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. 7α).

  Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. 7β).



(α)



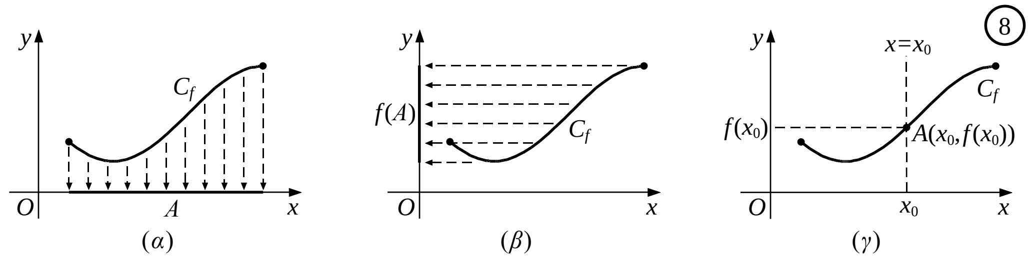
(β)

- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.

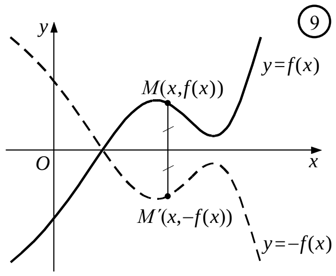
β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).

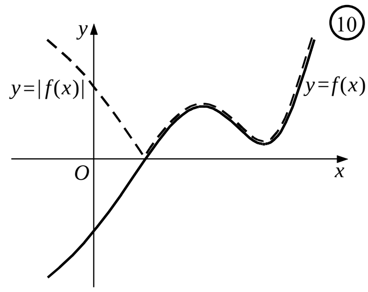


- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x,-f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x,f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ. 9).



β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).



3. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων

α) $f(x) = \alpha x + \beta$ β) $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ γ) $f(x) = \alpha x^3$, $\alpha \neq 0$

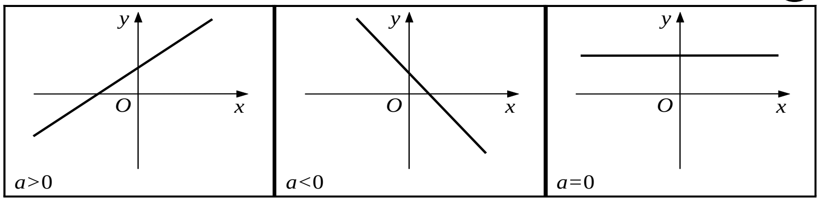
δ) $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$ ε) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{|x|}$.

<u>**Απάντηση :**</u>

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

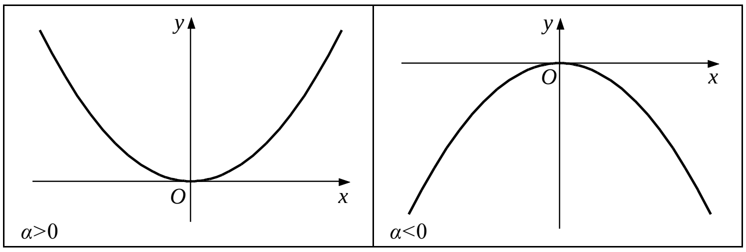
α) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

11



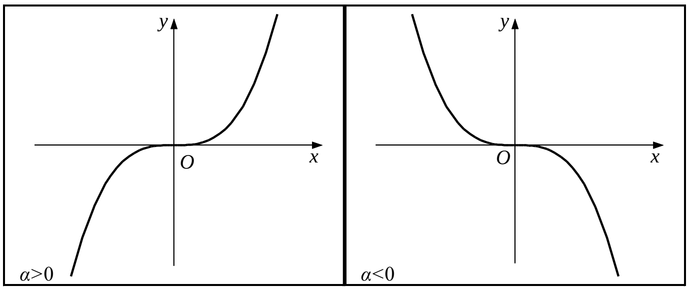
β)Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.

12



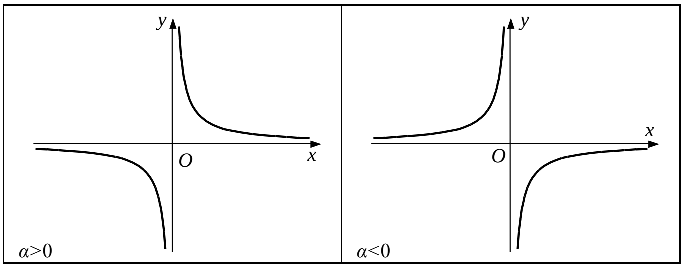
γ) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3$, $\alpha \neq 0$.

13



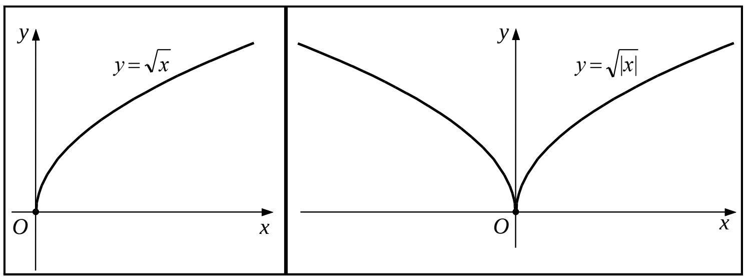
δ) Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$.

14



ε) Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}=\begin{cases}\sqrt{-x}\ , \ x<0\\ \sqrt{x}\ \ \ , \ x\geq 0\end{cases}$.

15



4. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :

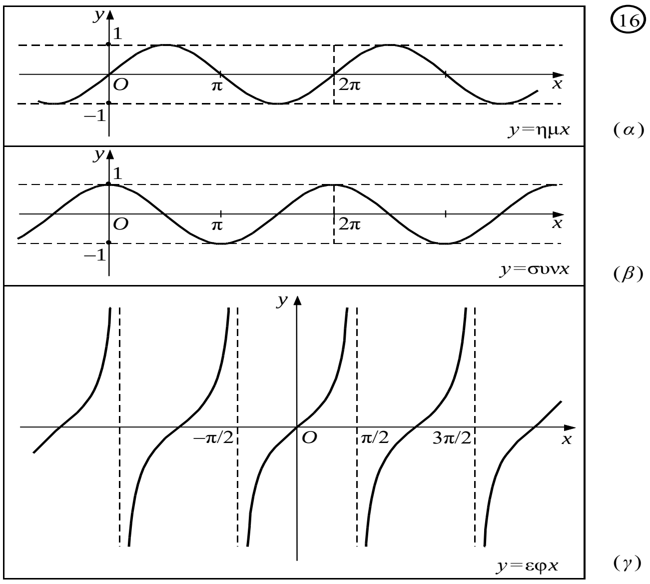
α) $f(x) = ημx$, $f(x) = συνx$, $f(x) = εφx$

β) $f(x) = α^x$, $0 < α \neq 1$ γ) $f(x) = \log_α x$, $0 < α \neq 1$

Απάντηση :

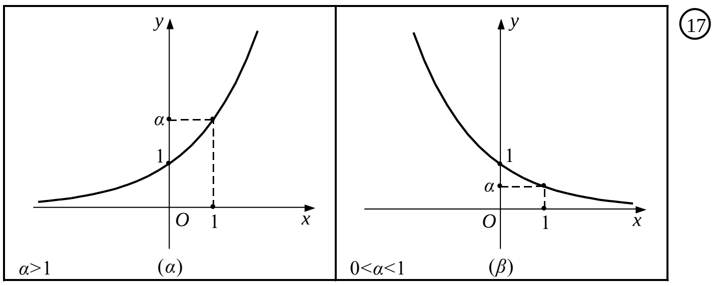
Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

α) Οι τριγωνικές συναρτήσεις : $f(x) = ημx$, $f(x) = συνx$, $f(x) = εφx$



Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x) = ημx$ και $f(x) = συνx$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2π$, ενώ η συνάρτηση $f(x) = εφx$ είναι περιοδική με περίοδο $T = π$.

β) Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = α^x$, $0 < α \neq 1$.

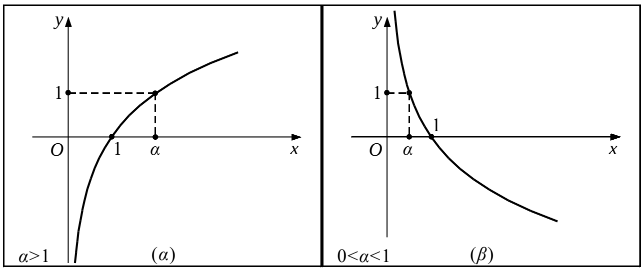


Ιδιότητες :

Υπενθυμίζουμε ότι:

- Αν $α > 1$, τότε: $α^{x_1} < α^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
- Αν $0 < α < 1$, τότε: $α^{x_1} < α^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

γ) Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_α x$, $0 < α \neq 1$



18

Ιδιότητες :

1) $\log_{\alpha} x = y \Leftrightarrow \alpha^{y} = x$

2) $\log_{\alpha} \alpha^{x} = x$ και $\alpha^{\log_{\alpha} x} = x$

3) $\log_{\alpha} \alpha = 1$ και $\log_{\alpha} 1 = 0$

4) $\log_{\alpha}(x_1 x_2) = \log_{\alpha} x_1 + \log_{\alpha} x_2$

5) $\log_{\alpha}\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_{\alpha} x_1 - \log_{\alpha} x_2$

6) $\log_{\alpha} x_1^{k} = \kappa \log_{\alpha} x_1$

7)Αν $\alpha > 1$, τότε: $\log_{\alpha} x_1 < \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, ενώ αν $0 < \alpha < 1$, $\log_{\alpha} x_1 < \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

8) $\alpha^{x} = e^{x\ln\alpha}$, αφού $\alpha = e^{\ln\alpha}$.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f,g λέγονται ίσες ;

Απάντηση : **(2007, 2007 ΕΣΠ Β΄, 2008 ΟΜΟΓ., 2012 ΕΣΠ. Β΄, 2012 Β΄, 2014 ΕΣΠ. Β΄, 2016)**

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

6. Πώς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης , αφαίρεσης , γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων f,g;

Απάντηση :

Ορίζουμε ως άθροισμα $f+g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\dfrac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους : $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

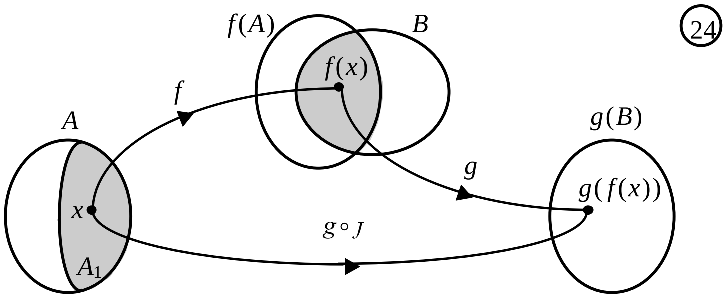
Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού Α και Β των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\dfrac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο :

$\{x \mid x \in A$ και $x \in B$, με $g(x) \neq 0\}$.

7. Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g ;

Απάντηση :

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(gof)(x) = g(f(x))$.



Σχόλια :

α) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A \,|\, f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται ,αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

β) • Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές **δεν είναι υποχρεωτικά** ίσες.

• Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει

$ho(gof) = (hog)of$. Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

8. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση : **(2007 ΟΜΟΓ., 2007 ΕΣΠ., 2010 ΕΣΠ.,)**

- Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

- Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ.** Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

- ***αύξουσα*** *σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε* $x_1, x_2 \in \Delta$ *με* $x_1 < x_2$ *ισχύει* $f(x_1) \le f(x_2)$.
- ***φθίνουσα*** *σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε* $x_1, x_2 \in \Delta$ *με* $x_1 < x_2$ *ισχύει* $f(x_1) \ge f(x_2)$.

9. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο ;

Απάντηση : **(2004 ΟΜΟΓ., 2010 Β΄, 2014 ΕΣΠ.)**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Κάποιες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.
Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της f.

10. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται $1-1$;

Απάντηση : **(2003 ΟΜΟΓ., 2005 Β΄, 2012 ΟΜΟΓ., 2015 Β΄)**

Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται συνάρτηση $\mathbf{1-1}$, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1 \ne x_2$, τότε $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Σχόλια :

α) Μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι συνάρτηση $\mathbf{1-1}$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

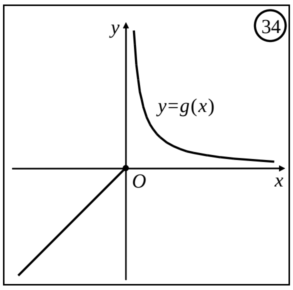
β) Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν:

- **Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.**

- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι **κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο**.

- **Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση** "$1-1$"**.Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.** Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που είναι $1-1$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

Παράδειγμα (Πανελλήνιες 2018)



Η συνάρτηση η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x & , \ x\le 0 \\ \frac{1}{x} & , \ x>0 \end{cases}$ (Σχ. 34).είναι $1-1$,

αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

__Παρατηρήσεις :__

- Αν γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε : $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$. Την ισοδυναμία αυτή τη χρησιμοποιούμε για επίλυση εξισώσεων. Επίσης ισχύει : $f(x_1)\ne f(x_2)\Leftrightarrow x_1\ne x_2$.

- Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 αρκεί : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.

- Αν η f δεν είναι 1-1, τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in A$ τ.ω. $x_1\ne x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)$.

- $\mu o\nu o\tau o\nu i\alpha \Rightarrow 1-1$ όμως $1-1 \not\Rightarrow \mu o\nu o\tau o\nu i\alpha$

- $\acute{o}\chi\iota\ \mu o\nu o\tau o\nu i\alpha \not\Rightarrow \acute{o}\chi\iota\ 1-1$ όμως $\acute{o}\chi\iota\ 1-1 \Rightarrow \acute{o}\chi\iota\ \mu o\nu o\tau o\nu i\alpha$

11. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A αντιστρέφεται και πώς ;

__Απάντηση :__

Μια συνάρτηση $f:A\to R$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι $1-1$.Η αντίστροφη συνάρτηση της f που συμβολίζεται με f^{-1} ορίζεται από τη σχέση : $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

__Σχόλια :__

α) Ισχύει ότι : $f^{-1}(f(x))=x,\ \ x\in A$ και $f(f^{-1}(y))=y,\ \ y\in f(A)$.

β) Η αντίστροφη της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f, και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f.

Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$. Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι $1-1$ με πεδίο ορισμού το $\Re$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της *f*. Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,

– έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$

– έχει σύνολο τιμών το $\Re$ και

– αντιστοιχίζει κάθε $y \in (0,+\infty)$ στο μοναδικό $x \in \Re$ για το οποίο ισχύει $\alpha^x = y$. Επειδή όμως $\alpha^x = y \Leftrightarrow x = \log_\alpha y$

θα είναι $f^{-1}(y) = \log_\alpha y$. Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_\alpha x$.

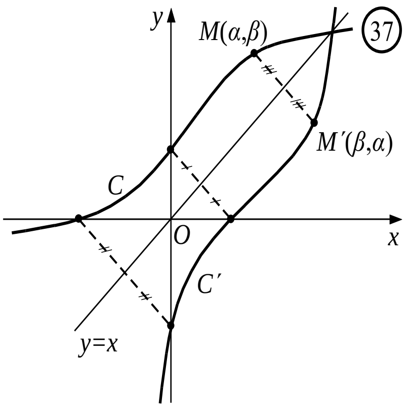
Συνεπώς $\boldsymbol{\log_\alpha \alpha^x = x, \ \ x \in \Re}$ και $\boldsymbol{\alpha^{\log_\alpha x} = x, \ \ x \in (0,+\infty)}$.

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Απόδειξη :

Ας πάρουμε μια $1-1$ συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ.37). Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$,

αν ένα σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο $\mathrm{M}'(\beta,\alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

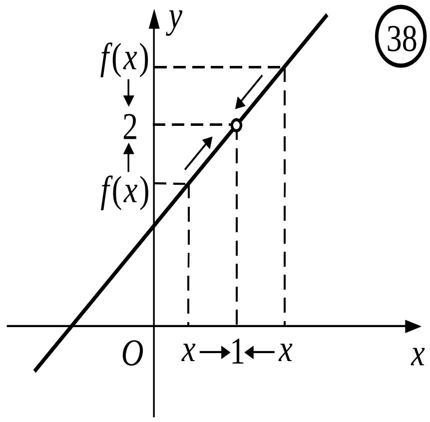


Παρατηρήσεις :

- $f: 1-1 \Leftrightarrow f: \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\rho\acute{\varepsilon}\psi\iota\mu\eta$,
- $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$
- Αν f γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ, τότε η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας : π.χ. αν $f \uparrow \sigma\tau o\ \mathrm{A}$ τότε έστω $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}} = f(\mathrm{A})$ με $y_1 < y_2$, τότε :

$$f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \text{ άρα } f^{-1} \uparrow \text{ στο } D_{f^{-1}} = f(\mathrm{A})$$

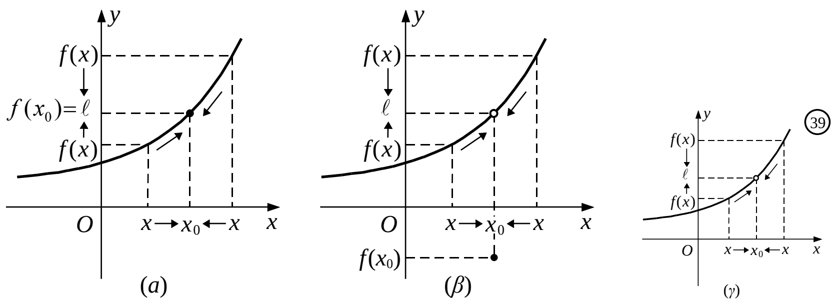
Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ



- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f=\Re-\{1\}$ και γράφεται

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1, \qquad x\neq 1.$$

Επομένως, η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y=x+1$ με εξαίρεση το σημείο Α(1,2) (Σχ. 38). Στο σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι:
"Καθώς το x, κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το $f(x)$, κινούμενο πάνω στον άξονα $y'y$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2. Και μάλιστα, οι τιμές $f(x)$ είναι τόσο κοντά στο 2 όσο θέλουμε, για όλα τα $x\neq 1$ που είναι αρκούντως κοντά στο 1".
Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ και διαβάζουμε "το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο 1, είναι 2".
Γενικά : Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ και διαβάζουμε "το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ" ή "το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ".



ΣΧΟΛΙΟ
Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι :

— Για να αναζητήσουμε το όριο της *f* στο x_0, πρέπει η *f* να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η *f* να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής :

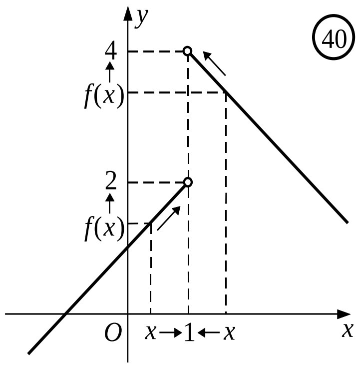
$$(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta) \quad \text{ή} \quad (\alpha,x_0) \quad \text{ή} \quad (x_0,\beta).$$

— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό (Σχ. 39γ).

— Η τιμή της *f* στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).

• Έστω, τώρα, η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ -x+5, & x>1 \end{cases}$,

της οποίας η γραφική παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες του διπλανού σχήματος.



Παρατηρούμε ότι :

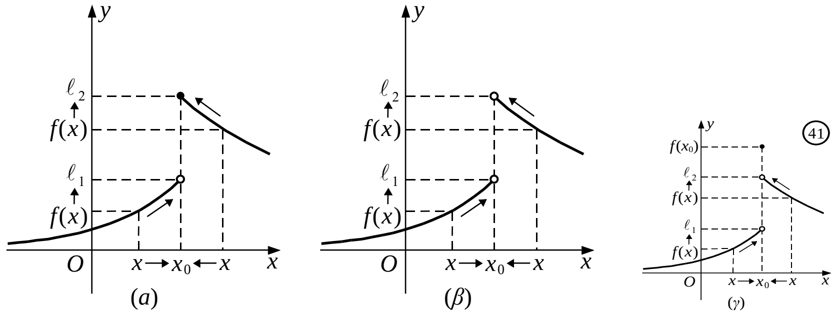
— Όταν το *x* προσεγγίζει το 1 από αριστερά $(x<1)$, τότε οι τιμές της *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$.

— Όταν το *x* προσεγγίζει το 1 από δεξιά $(x>1)$, τότε οι τιμές της *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$.

Γενικά:

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το *x* προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές $(x<x_0)$, τότε γράφουμε : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_1$ και διαβάζουμε : "το όριο της $f(x)$, όταν το *x* τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1".

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2, καθώς το *x* προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές $(x>x_0)$, τότε γράφουμε : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell_2$ και διαβάζουμε : "το όριο της $f(x)$, όταν το *x* τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2".

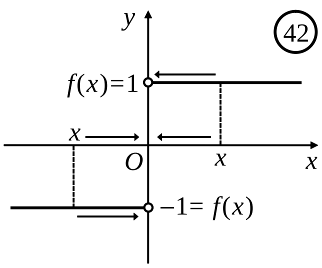


Τους αριθμούς $\ell_1=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της *f* στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της *f* στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της *f* στο x_0.

Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell, \quad \text{αν και μόνο αν} \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell}$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\frac{|x|}{x}$ (Σχ. 42) δεν έχει όριο στο $x_0=0$, αφού:



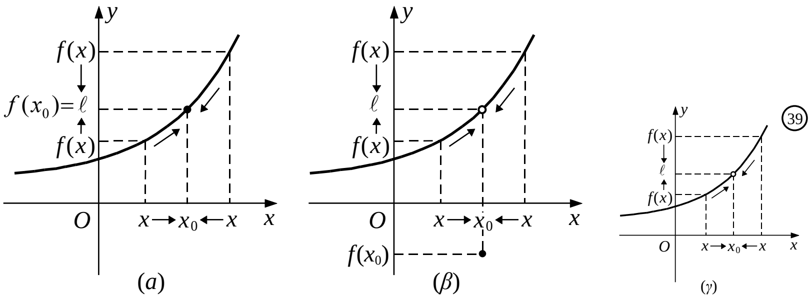
— για $x<0$ είναι $f(x)=\frac{-x}{x}=-1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$, ενώ

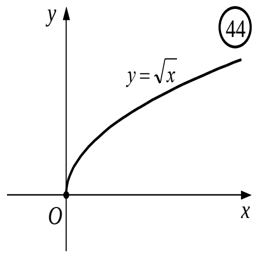
— για $x>0$ είναι $f(x)=\frac{x}{x}=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$, και έτσι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

12. Ποια πρόταση συνδέει το όριο της f στο x_o και τα πλευρικά όρια της f στο x_o ;

Απάντηση :

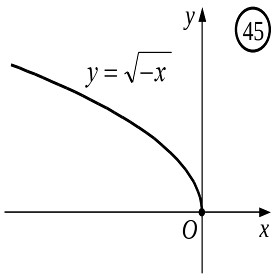
Ισχύει ότι : Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$





• Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0,β), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α,x_0), τότε ορίζουμε : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Για παράδειγμα, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ (Σχ. 44)



• Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α,x_0), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0,β), τότε ορίζουμε : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Για παράδειγμα, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{-x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{-x}=0$ (Σχ. 45)

Παρατηρήσεις :

α) Ισχύει ότι :

(α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$

(β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

β) Τους αριθμούς $\ell_1=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ τους λέμε πλευρικά όρια της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 αριστερό όριο της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 δεξιό όριο της f στο x_0.

γ) — Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε “κοντά στο x_0”, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ ή (α,x_0) ή (x_0,β).

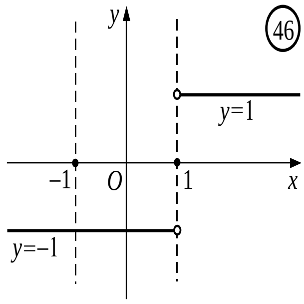
— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ’ αυτό .

— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$

ε) Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α, β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η *f*.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0 = 0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1, 0) \cup (0, 1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή $f(x) = \dfrac{-(x-1)}{x-1} = -1$. Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$.



στ) Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση *f* έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα *P* θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

i) Η *f* είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα *P*.

ii) Η *f* είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα *P*, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β).

iii) Η *f* είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα *P*, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$ είναι θετική κοντά στο $x_0 = 0$, αφού ορίζεται στο σύνολο $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και είναι θετική σε αυτό.

1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

13. Να γράψετε τις ιδιότητες του ορίου στο x_o.

Απάντηση :

Για το όριο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

α) Θεώρημα 1° *(πρόσημο συναρτήσεων και όρια)*

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Παρατήρηση :

- Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και είναι $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$
- Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και είναι $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq 0$

β) Θεώρημα 2ο *(διάταξη και όρια)*

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$

Παρατήρηση : Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim_{x \to x_0} g(x)$

- Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$
- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > \lim_{x \to x_0} g(x)$, τότε $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0.
- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x)$, τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0.

γ) Θεώρημα 3ο *(πράξεις συναρτήσεων και όρια)*

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \to x_0}(\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in R$
3. $\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$
4. $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$
5. $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x \to x_0} f(x)\right|$
6. $\lim_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0.

Παρατηρήσεις :

- Οι ιδιότητες 1. και 3. ισχύουν και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.
- Τα αντίστροφα των ιδιοτήτων 1., 2., 3., 4., 5. Δεν ισχύουν πάντα. Για παράδειγμα μπορεί να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ και να μην υπάρχουν τα όρια των f και g στο x_0.

Για παράδειγμα : $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}-1, & x>0\\ 1, & x<0\end{cases}$. Προφανώς τα όρια των f και g στο 0 δεν υπάρχουν, όμως

- $(f+g)(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}=0$ για κάθε $x\neq 0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 0}0=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}(0\cdot f(x))=\lim\limits_{x\to 0}0=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to 0}(-1)=-1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(-1)=-1$
- $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0}1=1$

δ) Είναι : $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^\nu=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ για παράδειγμα $\lim\limits_{x\to x_0}x^\nu=x_0^\nu$

ε) Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Είναι : $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

Απόδειξη :

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu)+\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=$$
$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0=P(x_0)$$
Άρα : $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

στ) Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0\in\mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$. Θα είναι τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, όπου $Q(x_0)\neq 0$

ζ)

Κριτήριο παρεμβολής **(2016 Β΄)**

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h . Αν

- $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$

η) Ισχύει ότι *(τριγωνομετρικά όρια)*

- $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in R$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.
- $\lim_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
- $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1}$
- $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0}$

14. Πώς υπολογίζουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο x_o .

<u>Απάντηση :</u>

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0 ,δηλαδή το $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \to u_0} f(u)$.

Αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u)$.

1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \Re$

15 .Να γράψετε τις ιδιότητες του άπειρου ορίου στο x_o .

Απάντηση :

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=-\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

στ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

ζ)Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$. η) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$.

θ) i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu}}=+\infty$, $\nu\in N^*$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$, $\nu\in N$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$, $\nu\in N$.

Επομένως δεν υπάρχει στο 0 το όριο της $f(x)=\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu\in N$.

16 . Να γράψετε τα Θεωρήματα του άπειρου ορίου στο x_o

Απάντηση :

Για το άθροισμα και το γινόμενο ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0\in R$						
το όριο της f είναι:	$\alpha\in R$	$\alpha\in R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in R$,										
το όριο της f είναι:	α>0	α<0	α>0	α<0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Σχόλιο

Οι παρακάτω μορφές λέγονται απροσδιόριστες μορφές :

$$(+\infty)+(-\infty)\ ,\ 0\cdot(\pm\infty)\ ,\ (+\infty)-(+\infty),\ (-\infty)-(-\infty)\ ,\ \frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

17. Να γράψετε τις ιδιότητες για το όριο στο άπειρο .

Απάντηση :

α) Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{\nu}} = 0$, $\nu \in N^*$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^{\nu}} = 0$, $\nu \in N^*$.

β) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει:

$\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$

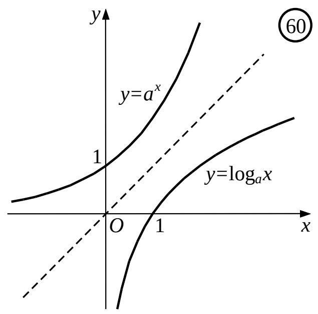
γ) Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\kappa \neq 0$ ισχύει:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$

δ) Για το όριο εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης ισχύει ότι

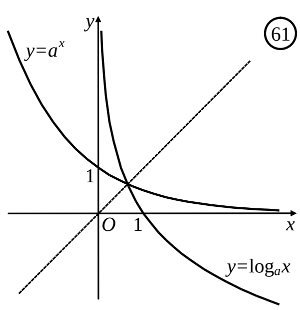
- Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0} \log_\alpha x = -\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$



- Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$



Σχόλια

● Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.

● Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.

● Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και

— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή

18. Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.

Απάντηση :

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathrm{N}^* \to \Re$.

19. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \Re$;

Απάντηση :

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \Re$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathrm{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$

1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

20. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση : **(2001 ΟΜΟΓ., 2006 ΟΜΟΓ., 2009 Β΄, 2010 ΟΜΟΓ., 2015)**

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Σχόλια :

α) Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

i) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

ii) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

β) Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, συνεχής συνάρτηση.

γ) — Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

— Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

— Οι συναρτήσεις $f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$ είναι συνεχείς, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$\lim_{x \to x_0} ημx = ημx_0$ και $\lim_{x \to x_0} συνx = συνx_0$.

— Οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$ είναι συνεχείς.

21. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων.

Απάντηση :

Για τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις : i. $f + g$, ii. $c \cdot f$, όπου $c \in \mathbb{R}$, iii. $f \cdot g$, iv. $\frac{f}{g}$, v. $|f|$ και vi. $\sqrt[\nu]{f}$ με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

Σχόλιο :Τα αντίστροφα των i., iii., iv., v., και ii., για $c=0$, δεν ισχύουν. Δηλαδή, μπορεί οι συναρτήσεις : $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$, $0\cdot f$ να είναι συνεχείς στο x_0 και οι f,g να μην είναι συνεχείς στο x_0.

Για παράδειγμα : $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$. Προφανώς οι συναρτήσεις f και g δεν είναι συνεχείς στο 0, όμως οι συναρτήσεις :

- $(f+g)(x)=0$, $x\in\Re$,
- $(f\cdot g)(x)=-1$, $x\in\Re$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-1$, $x\in\Re$,
- $|f(x)|=1$, $x\in\Re$,
- $0\cdot f(x)=0$, $x\in\Re$

είναι συνεχείς στο 0.

Παρατηρήσεις :

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από τα ξένα διαστήματα (α,β) και (β,γ), τότε η f είναι συνεχής στο σύνολο $A=(\alpha,\beta)\cup(\beta,\gamma)$.
- Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0, δεν είναι υποχρεωτικά συνεχής και σε μια περιοχή του x_0.

22. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης .

Απάντηση :

Για τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

23. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

Απάντηση : **(2001 ΟΜΟΓ., 2008, 2012, 2012 ΕΣΠ., 2017)**

- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον : $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$

Σχόλιο

Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$.

24. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση : **(2013 ΟΜΟΓ., 2014 ΕΣΠ. Β΄)**

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Σχόλια :

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.
- Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

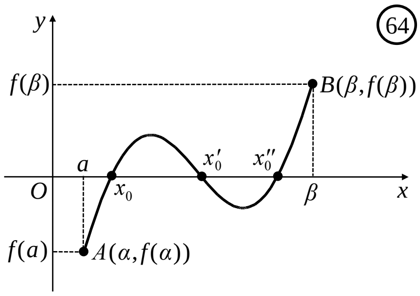
Παρατηρήσεις :

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)\le 0$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.
- Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano, δεν ισχύει πάντα. Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$ που έχει ρίζα στο (α,β) αλλά δεν είναι συνεχής στο [α,β] ή δεν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$
- Αν δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, δεν έχουμε ως συμπέρασμα ότι η f δεν έχει ρίζα στο (α,β).

25. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση :

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



26. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του ενδιαμέσων τιμών.

Διατύπωση :

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$

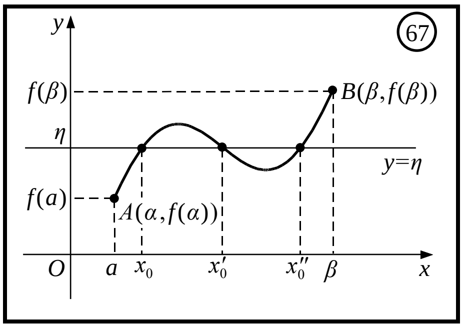
Απόδειξη : **(2001 ΟΜΟΓ., 2005, 2010 ΕΣΠ. Β΄, 2013 ΕΣΠ., 2015)**

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

Αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.



Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β] και τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $y=\eta$, τότε η C_f τέμνει την ευθεία $y=\eta$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $\mathrm{M}(x_0,\eta)$ με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\beta)$.

Σχόλια :

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

β) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

27. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Απάντηση :

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

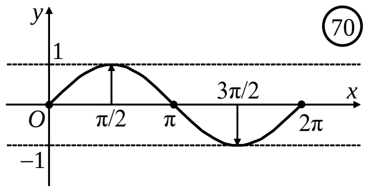
Δηλαδή, υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$, να ισχύει

$\boldsymbol{m\leq f(x)\leq M}$, για κάθε $\boldsymbol{x\in[\alpha,\beta]}$.

Σχόλιο :

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$, $x\in[0,2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το $[-1,1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$ με $m=-1$ και $M=1$.



- Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

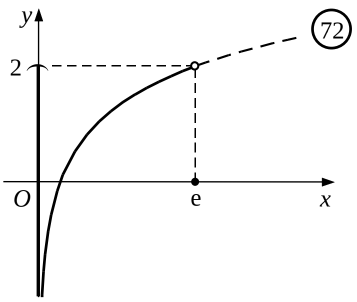
Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) (Σχ. 71α), όπου $\mathrm{A}=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $\mathrm{B}=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

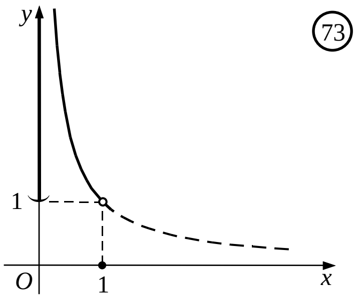
Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) (Σχ. 71β).

Για παράδειγμα,

— Το σύνολο τιμών της $f(x)=\ln x+1$, $x\in(0,e)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση (Σχ. 72), είναι το διάστημα $(-\infty,2)$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to e^-} f(x)=2.$$





— Το σύνολο τιμών της $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση, (Σχ. 73) είναι το διάστημα $(1,+\infty)$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1} f(x)=1.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ 1^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 - 2018

➢ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α,Β αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B} \neq \varnothing$.

2) Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

3)Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow IR$ είναι συνάρτηση 1 – 1,αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

4) Αν *f*, *g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού IR και ορίζονται οι συνθέσεις *fog* και *gof*, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

5) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς

την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

6) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 , $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

7) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

8) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά fog ≠ gof.

9) Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow IR$. λέγεται συνάρτηση 1 – 1, όταν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

10) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_o)$, όταν : $f(x) < f(x_o)$ για κάθε $x \in A$.

11) Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow IR$ είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

12) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον xx΄) τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ σε ένα σημείο.

13) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f.

14) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

15) Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow IR$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \ x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \ y \in f(A)$$

16) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

17) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

18) Η συνάρτηση f είναι 1 – 1 , αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

19) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε πάντοτε ισχύει fog = gof

20) Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο Α των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης.

21) Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f, που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x, και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f, που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

22) Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

23) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

24) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

25) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1 – 1 στο διάστημα αυτό.

26) Μια συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

27) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης – f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f.

28) Αν μια συνάρτηση f είναι 1 – 1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

29) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η ho(gof), τότε ορίζεται και η (hog)of και ισχύει : ho(gof) = (hog)of

30) Αν η συνάρτηση $f : A \to R$ είναι 1 – 1 τότε ισχύει : $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$

31) Αν η f είναι 1-1 και το σημείο Μ (α, β) ανήκει στην γραφική παράσταση C της f , τότε το

M'(β, α) θα ανήκει στην γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως.

- **<u>ΟΡΙΑ</u>**

32) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

33) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0 .

34) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \to x_o} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_o} f(x) + \lim_{x \to x_o} g(x)$$

35) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to x_o}f(x)-\lim_{x\to x_o}g(x)$$

36) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε ισχύει :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)} \quad , \quad \text{εφόσον} \quad \lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0 \ .$$

37) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ **,** αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=l$

38) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$, εφόσον f(x) ≥ 0 κοντά στο x_0, με k ∈ IN και k ≥ 2.

39) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\big(g(x)\big)$.

40) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_o και ισχύει f(x) ≤ g (x) κοντά στο x_o, τότε :

$$\lim_{x\to x_0}f(x)>\lim_{x\to x_0}g(x)$$

41) Αν x ≠ 0, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=-\infty$.

42) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 ∈ IR, τότε: $\lim\limits_{x\to x_o}\big(k\,f(x)\big)=k\lim\limits_{x\to x_o}\big(f(x)\big)$ για κάθε σταθερά k∈ IR .

43) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο *x_0*.

44) Έστω f πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ και x_0∈Δ. Έστω επίσης f(x)≠0 για κάθε x∈Δ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

45) Αν α > 1 τότε $\lim\limits_{x\to -\infty}\alpha^x=0$.

46) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0∈R και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$, τότε f(x)<0 κοντά στο x_0.

47) Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής (α, x_0)∪(x_0, β) και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-\ell\big)=0$

48) Ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$

49) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ και f(x) < 0 κοντά στο x_o τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

50) Ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$

51) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$, τότε f(x) < 0 κοντά στο x_0.

52) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$

53) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ τότε f(x) < 0 κοντά στο x_0.

54) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_o, και ισχύει f(x) ≤ g(x) κοντά στο x_o, τότε ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

55) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

56) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και f(x)>0 κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

57) Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε f(x) < 0 κοντά στο x_0

58) Αν είναι 0 < α < 1 τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$

59) Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε f(x) < 0 κοντά στο x_0

60) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \alpha_0$

61) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\Re\to\Re$ και $g:\Re\to\Re$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = 0$.

62) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε x∈R

63) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

64) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = +\infty$

65) Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$

66) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

➢ <u>ΣΥΝΕΧΕΙΑ</u>

67) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.

68) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και υπάρχει x_0∈(α, β) τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ’ ανάγκη θα ισχύει f(α)·f(β)<0.

69) Αν f είναι συνεχής στο [α, β] με f(α)< 0 και υπάρχει ξ∈(α,β) ώστε f(ξ)=0, τότε κατ’ανάγκη f(β)> 0.

70) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ’ αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x∈Δ ή είναι αρνητική για κάθε x∈Δ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

71) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

72) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

73) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

74) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου Α= $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ και Β= $\lim_{x\to\beta^-} f(x)$.

75) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m.

76) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

77) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β), όπου $A = \lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x\to\beta^-} f(x)$.

78) Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα [α, β] είναι το κλειστό διάστημα [m, M], όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.

79) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

80) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ & ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΒΑΣΙΜΕΝΑ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΜΑ Α΄

1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Αν $f(x)\cdot g(x)=0$ για κάθε $x\in \mathrm{A}$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in \mathrm{A}$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in \mathrm{A}$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

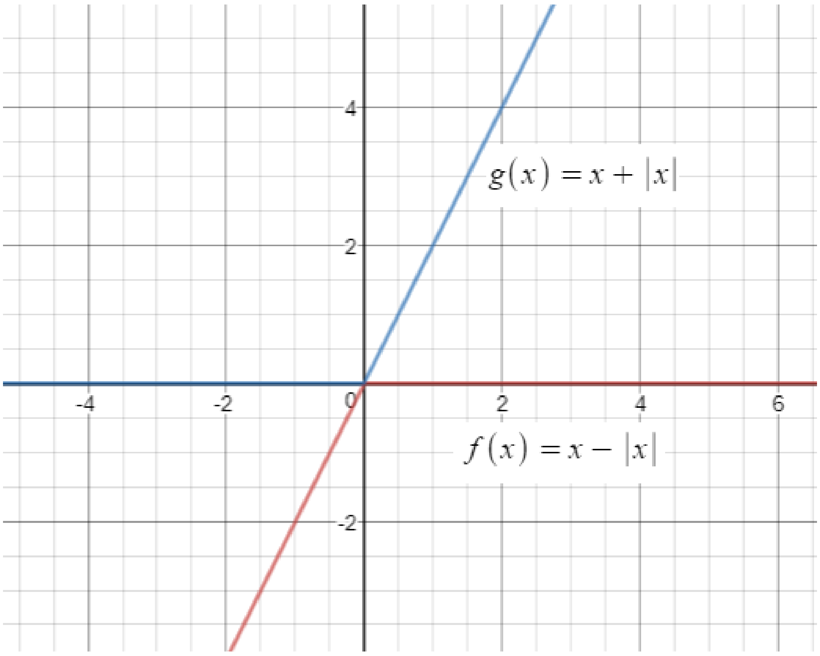
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x-|x|$, $x\in \Re$ και $g(x)=x+|x|$, $x\in \Re$. Έχουμε λοιπόν ότι :
$f(x)\cdot g(x)=\left(x-|x|\right)\cdot\left(x+|x|\right)=x^2-|x|^2=x^2-x^2=0$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι παραπάνω συναρτήσεις και οπτικοποιείται το αποτέλεσμα :



2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Αν f,g δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$ τότε υποχρεωτικά ισχύει $g\circ f = f\circ g$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\sqrt{x}$.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f=(0,+\infty)$, ενώ η g το $D_g=[0,+\infty)$.

Για να ορίζεται η παράσταση $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ πρέπει : $x\in D_f$ και $f(x)\in D_g$ ή , ισοδύναμα,

$\begin{cases} x>0 \\ f(x)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\geq 1\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1$, δηλαδή πρέπει $x\geq 1$. Επομένως, ορίζεται η $g\circ f$ και είναι : $(gof)(x)=g(f(x))=g(\ln x)=\sqrt{\ln x}$, $D_{g\circ f}=[1,+\infty)$

Για να ορίζεται η παράσταση $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ πρέπει : $x\in D_g$ και $g(x)\in D_f$ ή, ισοδύναμα,

$\begin{cases} x\geq 0 \\ g(x)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x>0$, δηλαδή πρέπει $x>0$. Επομένως, ορίζεται η $f\circ g$ και είναι : $(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\ln\sqrt{x}$, $D_{f\circ g}=(0,+\infty)$. Τελικά παρατηρούμε ότι $gof\neq fog$.

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Έστω f,g,h τρεις συναρτήσεις. Αν ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε υποχρεωτικά ισχύει $h\circ(g\circ f)=(g\circ f)\circ h$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Είναι ψευδής καθώς στην σύνθεση δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα όπως εξηγήθηκε στο **1.** αλλά η προσεταιριστική ιδιότητα $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(Πανελλήνιες 2018)***

«Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο Α και "1-1" τότε είναι και γνησίως μονότονη στο Α».

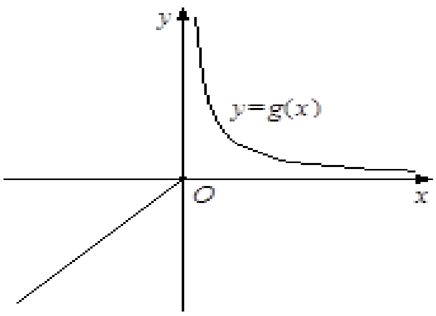
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι "1-1" αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x & , \quad x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x>0\end{cases}$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα :



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{o} : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

28. ΟΡΙΣΜΟΣ (2004, 2009)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση :

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο** x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Σχόλια :

α) Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x=x_0+h$, τότε έχουμε

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Πολλές φορές το $h=x-x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το $f(x_0+h)-f(x_0)=\ f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται: $\boldsymbol{f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}}$.

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange.

β) Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f, τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια :

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσα.

29. A) Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0,f(x_0))$

B) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o, να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0,f(x_0))$. **(2000)**

Απάντηση :

A) Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0,f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός *λ*, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της *A*, την ευθεία *ε* που διέρχεται από το *A* και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ*.

B) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $A(x_0,f(x_0))$ είναι:

$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$

Σχόλια :

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

• Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης *f*, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της *f* στο x_0. Δηλαδή, είναι $\boxed{\lambda=f'(x_0)}$,

οπότε η εξίσωση της *εφαπτομένης ε* είναι : $\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο *A*** ή **κλίση της *f* στο x_0**.

• Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x=S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι $\boldsymbol{\upsilon(t_0)=S'(t_0)}$.

30. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(2000, 2003, 2007 Β΄, 2013 Β΄, 2017 Σ-Λ με εξήγηση)**

Απόδειξη :

Για $x\neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$, οπότε θα είναι :

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Σχόλιο :

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα :

Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1$. **(Πανελλήνιες 2017)**

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Αν, όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε θα είναι και συνεχής στο x_0,

Ισχύει όμως ότι : Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

31. <u>ΟΡΙΣΜΟΙ</u>

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται :

α) Παραγωγίσιμη στο σύνολο Α

β) Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

γ) Παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ **(2010 Β΄, 2013)**

δ) Τι ονομάζουμε πρώτη, δεύτερη και γενικά νιοστή παράγωγο μιας συνάρτησης f ;

<u>Απάντηση :</u>

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Θα λέμε ότι:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

β) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** (α,β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

γ) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει: $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in R$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in R$.

δ) Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f' : A_1 &\to R \\ x &\to f'(x), \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της *f*** ή απλά **παράγωγος της *f***. Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται "ντε εφ προς ντε χι". Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$.

Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της *f*** και συμβολίζεται με f''.

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της *f***, με $\nu \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή

$$f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]', \quad \nu \geq 3.$$

Η εύρεση της παραγώγου συνάρτησης, με βάση τον ορισμό που δώσαμε, δεν είναι πάντα εύκολη. Στη συνέχεια θα δούμε μερικές βασικές περιπτώσεις παραγώγισης συναρτήσεων, που θα τις χρησιμοποιούμε στην εύρεση παραγώγου συναρτήσεων (αντί να χρησιμοποιούμε τον ορισμό κάθε φορά).

<u>Παρατήρηση :</u>

Ισχύει : $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ και $f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$

Επίσης : $f'(x)=\lim\limits_{u\to x}\dfrac{f(u)-f(x)}{u-x}$ και $f''(x)=\lim\limits_{u\to x}\dfrac{f'(u)-f'(x)}{u-x}$ $[x+h=u]$

32. Να αποδείξετε ότι :

α) Αν $f(x)=c$, τότε $f'(x)=0$

β) Αν $f(x)=x$, τότε $f'(x)=1$

γ) Αν $f(x)=x^{\nu}$, με $\nu\in N-\{0,1\}$, τότε $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$

δ) Αν $f(x)=\sqrt{x}$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

(2005 Β΄)

<u>Απόδειξη :</u>

α) Για $x\neq x_0$ ισχύει: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{c-c}{x-x_0}=0$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

β) Για $x\neq x_0$ ισχύει ότι : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

γ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

Επομένως : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

δ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$ οπότε :

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Παρατήρηση : η $f(x)=\sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=[0,+\infty)$, όμως : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

<u>Σχόλια – Τύποι :</u>

- Έστω συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή $\boxed{(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x}$

- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=-\eta\mu x$, δηλαδή $\boxed{(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x}$

- Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=e^x$, δηλαδή $\boxed{(e^x)'=e^x}$

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$, δηλαδή $\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}}$

2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

33. ΘΕΩΡΗΜΑ *(Παράγωγος αθροίσματος)*

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Απόδειξη :

Για $x \neq x_0$, ισχύει: $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$.

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$, δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Σημείωση :

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x).$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2, ..., f_k$, είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε : $(f_1+f_2+\cdots+f_k)'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\cdots+f_k'(x)$.

Για παράδειγμα, $(\eta\mu x+x^2+e^x+3)'=(\eta\mu x)'+(x^2)'+(e^x)'+(3)'=\sigma\upsilon\nu x+2x+e^x$.

34. ΘΕΩΡΗΜΑ *(Παράγωγος γινομένου)*

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Σημείωση :

• Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει:

$\boxed{(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$.

Για παράδειγμα, $(e^x\ln x)'=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'=e^x\ln x+e^x\frac{1}{x}, \quad x>0$.

• Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x)h(x))'&=[(f(x)g(x))\cdot h(x)]'=(f(x)g(x))'\cdot h(x)+(f(x)g(x))\cdot h'(x)\\&=[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]h(x)+f(x)g(x)h'(x)\\&=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).\end{aligned}$$

Για παράδειγμα : $(\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\ln x)'=(\sqrt{x})'\cdot\eta\mu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot(\eta\mu x)'\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot(\ln x)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\eta\mu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\frac{1}{x},\qquad x>0.$$

• Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c\in R$, επειδή $(c)'=0$, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε: $\boxed{(cf(x))'=cf'(x)}$ Για παράδειγμα : $(6x^3)'=6(x^3)'=6\cdot3x^2=18x^2$.

35. <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> *(Παράγωγος πηλίκου)*

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

<u>Σημείωση :</u>

• Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $g(x)\neq0$, τότε για κάθε $x\in\Delta$ έχουμε: $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}}$.

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in N^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$

<u>Απόδειξη</u>

Πράγματι, για κάθε $x\in\Re^*$ έχουμε :

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^\nu}\right)'=\frac{(1)'x^\nu-1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}.$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}$

<u>Απόδειξη:</u>

Πράγματι, για κάθε $x\in R-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}.$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R-\{x|\eta\mu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\frac{1}{\eta\mu^2x}$, δηλαδή $(\sigma\varphi x)'=-\frac{1}{\eta\mu^2x}$

36. <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$

<u>Σχόλια :</u>

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $\boldsymbol{(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)}$.

Δηλαδή, αν $\boldsymbol{u=g(x)}$, τότε $\boldsymbol{(f(u))'=f'(u)\cdot u'}$. Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y=f(u)$ και $u=g(x)$, έχουμε τον τύπο $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας.**

37. <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $a\in\Re-Z$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$,

β) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\alpha^{x}\ln\alpha$.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $x\in R^*$ και ισχύει $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$ **(2008)**

<u>Απόδειξη :</u>

α) Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$.

β) Πράγματι, αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^{x}\ln\alpha$.

γ) Πράγματι·

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$.
Επομένως, $y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$ και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

38. ΟΡΙΣΜΟΣ

Τι λέμε ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x για $x=x_0$, αν $y=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ;

Απάντηση :

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Σχόλια :

- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $v'(t_0)$, της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $v'(t_0)$ λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$. Είναι δηλαδή : $\alpha(t_0)=v'(t_0)=S''(t_0)$.
- Στην οικονομία, το κόστος K, η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $\mathrm{K}'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x, όταν $x=x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0. Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0.

2.5 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

39. ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE (2007 Β΄, 2012 Β΄)

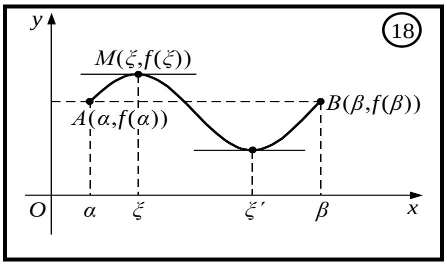
Να διατυπώσετε τι θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία.

Απάντηση :

Το θεώρημα του Rolle διατυπώνεται ως εξής :

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α,β) **και**
- $f(\alpha)=f(\beta)$



τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιο, ώστε** $f'(\xi)=0$**.**

Γεωμετρική Ερμηνεία :

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

40. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (2003, 2008 Β΄, 2013, 2016)

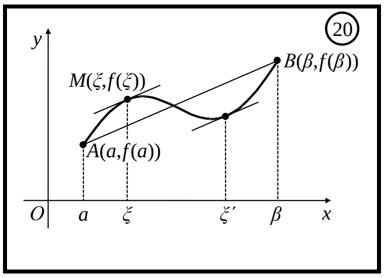
Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση :

Το θεώρημα της μέσης τιμής διατυπώνεται ως εξής :

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$ **και**
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α,β)



τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιο, ώστε:** $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$**.**

Γεωμετρική Ερμηνεία :

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

2.6 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

41. <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> (2004 Β΄, 2009, 2014)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

<u>Απόδειξη :</u>

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. (1). Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

42. <u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>

Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

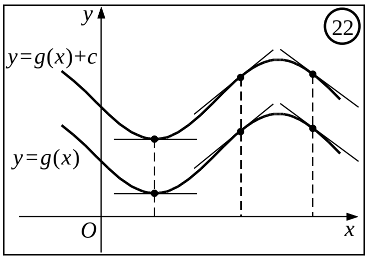
- οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$

<u>Απόδειξη :</u>

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$.

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.



<u>Σχόλιο :</u>

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμα του **ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.**

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1\,,\ x<0\\ \ \ 1\,,\ x>0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

43. ΕΦΑΡΜΟΓΗ (ΣΕΛ. 252)

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$,τότε $f(x)=ce^x$ για κάθε $x\in R$. Αντί του R μπορούμε να έχουμε τυχαίο διάστημα Δ.

44. <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> (2000, 2006, 2012, 2017)

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι σ υ ν ε χ ή ς σε ένα διάστημα Δ.

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

<u>Απόδειξη :</u>

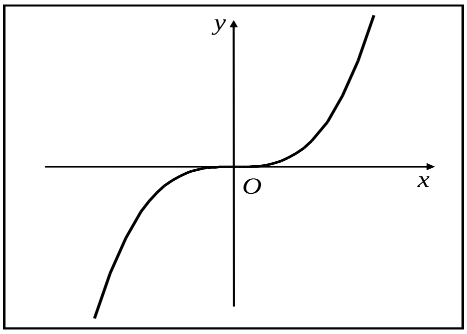
- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$. Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.
- Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

<u>Για παράδειγμα</u> : $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

<u>Σχόλιο :</u>

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\Re$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Re$.



2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

45. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο ; **(2012, 2015)**

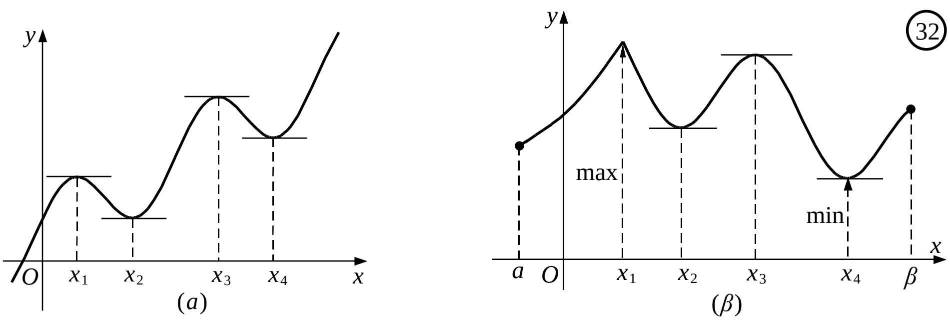
Απάντηση :

α) Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f**.

β) Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο,** όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \ge f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f**.

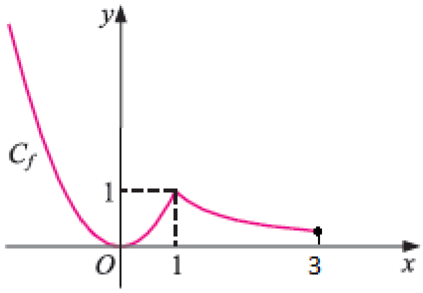
Σχόλια :

- Αν η ανισότητα $f(x) \le f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο,** το $\boldsymbol{f(x_0)}$ **.**
- Αν η ανισότητα $f(x) \ge f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το $\boldsymbol{f(x_0)}$.
- Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων.** Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** ή απλά **ακρότατα** αυτής.
- Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ.32α).



• Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β). Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. 32α).

Για παράδειγμα : Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 \ , x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} \ , 1<x\le 3 \end{cases}$



- στο $x_1=0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$, το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο.
- στο $x_2=1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1)=1$.
- στο $x_3=3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

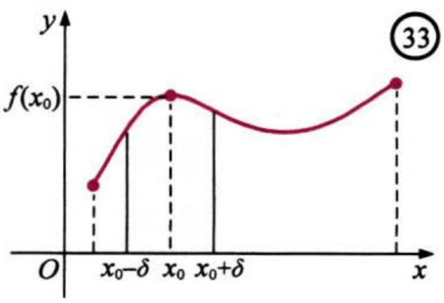
ΘΕΩΡΗΜΑ Fermat **(2004, 2011, 2013 Β΄ μόνο διατύπωση, 2016 Β΄)**

46. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι : $f'(x_0)=0$

Απόδειξη :

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε: $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. (1)



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0. \ (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$. (3)

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Γεωμετρική ερμηνεία :

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

47. α) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ; **(2013 Β΄)**

β) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ

Απάντηση :

α) Κ**ρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ λέγονται τα ε σ ω τ ε ρ ι κ ά σημεία του Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

β) Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακοτάτων μιας συνάρτησης f σ’ ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.

2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της). (Τα άκρα των κλειστών διαστημάτων)

48. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

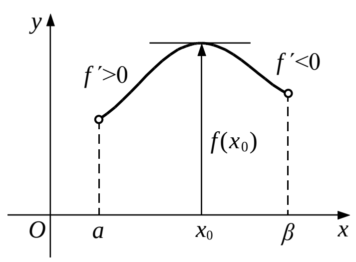
i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. **(2016)**

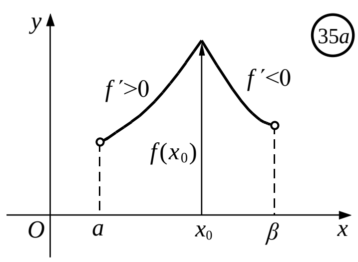
ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). **(2014 Β΄)**

Απόδειξη :

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1) Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$. (2)



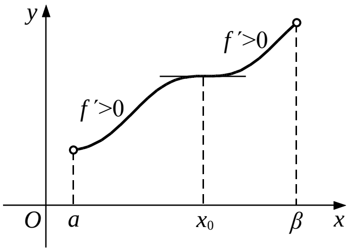


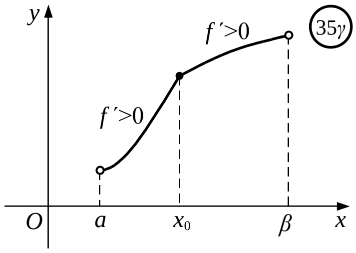
35α

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β) .

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

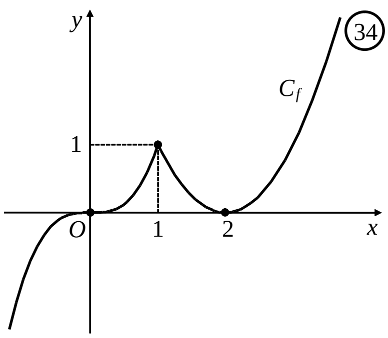
<u>Παράδειγμα 1</u> : Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4-4x^3$ που είναι ορισμένη στο $\Re$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με $f'(x)=4x^3-12x^2$. Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι $x=0$ (διπλή) ή $x=3$, το δε πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
f	↘		↘	Ο.Ε.	↗

Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,3]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$ και παρουσιάζει ένα μόνο τοπικό ακρότατο, συγκεκριμένα ολικό ελάχιστο για $x=3$, το $f(3)=-27$.

<u>Παράδειγμα 2</u> : Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & , \quad x<1\\ (x-2)^2 & , \quad x\geq 1\end{cases}.$$



Η f είναι συνεχής στο $\Re$ και παραγωγίσιμη στο $\Re-\{1\}$,

με : $f'(x)=\begin{cases}3x^2 & , \quad x<1\\ 2(x-2) & , \quad x>1\end{cases}.$

Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι οι 0 και 2.

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$

$f'(x)$	+	0	+	0	-	0	+
f	↗		↗	**Τ.Μ.**	↘	**Τ.Ε.**	↗

Επειδή η f' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της *f* είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της *f*.

<u>Σχόλια :</u>

- Όπως είδαμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος στην πρώτη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της *f* στο (α,β), ενώ στη δεύτερη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της *f* στο (α,β).

- Αν μια συνάρτηση *f* είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα § 1.8), η *f* παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της *f*.**
2. **Υπολογίζουμε τις τιμές της *f* στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**
3. **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της *f*.**

<u>Παρατηρήσεις</u> : Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο ***ανοιχτό*** διάστημα Δ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

- Αν η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο, τότε $f'(x_0)=0$.
- Αν $x_0 \in \Delta$ και $f'(x_0) \neq 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.
- Αν για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) \neq 0$, τότε η f δεν έχει ακρότατα.
- Αν $x_0 \in \Delta$ και $f'(x_0)=0$, τότε η f δεν παρουσιάζει υποχρεωτικά ακρότατο στο x_0.
- Αν $x_0 \in \Delta$, τότε δεν είναι ισοδύναμες οι προτάσεις : «Η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0» και «Η εφαπτομένη της C_f στο x_0 είναι παράλληλη στον άξονα x΄x»

2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

49. ΟΡΙΣΜΟΣ (2006, 2010, 2014)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

Έστω μία συνάρτηση *f* *σ υ ν ε χ ή ς* σ' ένα διάστημα *Δ* και *π α ρ α γ ω γ ί σ ι μ η* στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*. Θα λέμε ότι:

• Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

• Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

Σχόλιο :

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση *f* είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της *f* σε κάθε σημείο του *Δ* βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

50. ΘΕΩΡΗΜΑ

Να διατυπώσετε το θεώρημα που αφορά τα κοίλα και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της f

Απάντηση :

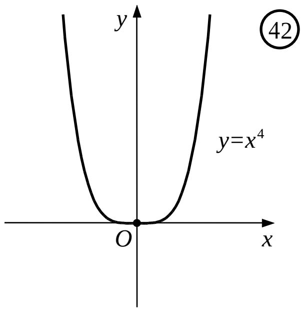
Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο ε σ ω τ ε ρ ι κ ό του Δ.

• Αν $f''(x) > 0$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

• Αν $f''(x) < 0$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Σχόλιο :

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x)=4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο R. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο R, αφού $f''(0)=0$.



51. ΟΡΙΣΜΟΣ

Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f ;

Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

Σχόλιο :

Όταν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η **f παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f διαπερνά την καμπύλη.

52. ΘΕΩΡΗΜΑ

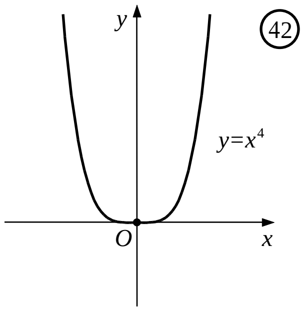
Ποιο θεώρημα αφορά τα σημεία καμπής μιας δυο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης f ;

Απάντηση :

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0)=0$.

Σχόλιο :

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$ (Σχ. 42). Ισχύει $f''(x)=12x^2$ δηλ. $f''(0)=0$. Όμως η f δεν έχει σημείο καμπής στο 0.



53. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

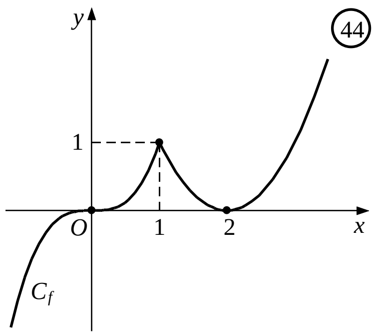
Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

i)Τ**α εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται .**

ii)Τ**α εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .**

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ (x-2)^4 & , \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad (Σχ.\ 44)$$



Η *f* είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re - \{1\}$ με

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & , \quad x < 1 \\ 12(x-2)^2 & , \quad x > 1 \end{cases}.$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$ 0	1	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$ 0	+	+ 0	+
$f(x)$	κοίλη	κυρτή	κυρτή	κυρτή

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής είναι τα σημεία 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 δεν είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σ' αυτά η f δεν αλλάζει κυρτότητα, ενώ το σημείο 0 είναι θέση σημείου καμπής, αφού στο $O(0, f(0))$ υπάρχει εφαπτομένη της C_f και η f στο 0 αλλάζει κυρτότητα. Παρατηρούμε λοιπόν ότι από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής, θέση σημείου καμπής είναι μόνο το 0, εκατέρωθεν του οποίου η f'' αλλάζει πρόσημο.

Μέθοδος – Κριτήριο : Πως καταλήγουμε στο ποιες από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f αποτελούν τελικά σημεία καμπής της ;

Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Παρατηρήσεις :

- Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
  - (Αν f είναι κυρτή στο Δ) $\Leftrightarrow$ $f' \uparrow$ στο εσωτερικό του Δ.
  - (Αν f είναι κοίλη στο Δ) $\Leftrightarrow$ $f' \downarrow$ στο εσωτερικό του Δ.
- Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα Δ.

- $\begin{cases} f''(x_0)=0 \\ f''\ \text{αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του } x_0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_0\ \text{θέση σ.κ.})$
- Αν η f παρουσιάζει καμπή στο x_0, τότε $f''(x_0)=0$.
- Αν $f''(x_0)\neq 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει καμπή στο x_0.
- Αν $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f δεν παρουσιάζει καμπή στο Δ.
- Πιθανές θέσεις σημείων καμπής είναι οι ρίζες της f'' στο Δ.

2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ DE L'HOSPITAL

54. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f; **(2010, 2015 Β΄)**

Απάντηση :

Η ευθεία $x=x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f , αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

55. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) ; **(2007, 2016 Β΄)**

Απάντηση :

Η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), όταν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$).

56. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$; **(2004 Β΄, 2005, 2011)**

Απάντηση :

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$, αντιστοίχως αν $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$.

57. Με ποιες σχέσεις (τύπους) βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της μορφής $y=\lambda x+\beta$;

Απάντηση :

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in R$, αντιστοίχως : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in R$.

<u>Χρήσιμα σχόλια :</u>

1. Αποδεικνύεται ότι:

—Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

—Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2.Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f **αναζητούμε:**

— **Στα άκρα των διαστημάτων** του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f **δεν είναι συνεχής**.

—Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

<u>Παρατηρήσεις</u> :

- Η C_f μπορεί να έχει (ένα μόνο) κοινό σημείο με μια κατακόρυφη ασύμπτωτη της.
- Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.
- Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η (ε) μπορεί να την τέμνει σε ένα ή περισσότερα σημεία.

58. Να διατυπώσετε τα θεωρήματα του de L'Hospital.

<u>Απάντηση :</u>

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο</u>

Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, $x_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$, $g'(x)\neq 0$ σε περιοχή του x_o με εξαίρεση ίσως το x_o και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο</u>

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$, $g'(x) \neq 0$ σε περιοχή του x_o με εξαίρεση ίσως το x_o και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

<u>Σχόλιο :</u>

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.

2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

2.10 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

59. Με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με ικανοποιητική ακρίβεια. Η πορεία που ακολουθούμε λέγεται μελέτη συνάρτησης. Ποια βήματα περιλαμβάνει ;

<u>Απάντηση :</u>

1ο Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της *f*.

2ο Εξετάζουμε τη συνέχεια της *f* στο πεδίο ορισμού της.

3ο Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της *f*, ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η *f* είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

4ο Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)

5ο Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ’ ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών της *f*** και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της *f*. Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της *f*.

<u>Σχόλιο :</u>

1) Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *A* είναι **άρτια**, τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι **περιττή**, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων *O*. Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.

2) Αν μια συνάρτηση *f* είναι **περιοδική** με περίοδο *T*, τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ’ ένα διάστημα πλάτους *T*.

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

1. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11$.

ΛΥΣΗ

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το R.

2. Η f είναι συνεχής στο R ως πολυωνυμική.

3. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3).$$

Οι ρίζες της f' είναι οι $x=3$, $x=0$ (διπλή) και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα.

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	-16 Τ.Ε.	$\nearrow$

Έχουμε επίσης

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2).$$

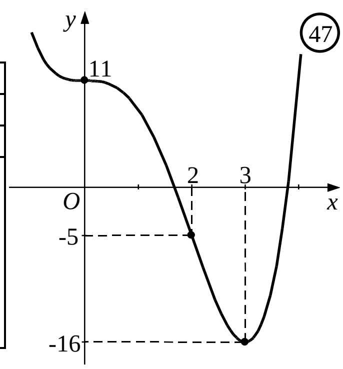
Οι ρίζες της f'' είναι οι $x=0$, $x=2$ και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	11 Σ.Κ.	$\cap$	-5 Σ.Κ.	$\cup$

4) Η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, αφού είναι πολυωνυμική τέταρτου βαθμού. Είναι όμως: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-4x^3+11) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-4x^3+11) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$.

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	11 Σ.Κ.	$\searrow$	-5 Σ.Κ.	$\searrow$	-16 Τ.Ε.	$\nearrow$	$+\infty$



2. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-x+4}{x-1}$.

ΛΥΣΗ

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{1\}$.

2. Η f είναι συνεχής ως ρητή.

3. Έχουμε $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-x+4}{x-1}\right)'=\dfrac{(2x-1)(x-1)-x^2+x-4}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

Οι ρίζες της f' είναι $-1,3$ και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-3 Τ.Μ.	↘	‖	↘	5 Τ.Ε.	↗	

Έχουμε επίσης

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4}=\frac{8}{(x-1)^3}.$$

Η f'' δεν έχει ρίζες και το πρόσημό της δίνεται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$		∩	‖	∪	

4) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Εξετάζουμε τώρα αν υπάρχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+4}{x^2-x}=1,\quad \text{οπότε}\quad \lambda=1$$

Και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x+4}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$, οπότε $\beta=0$.

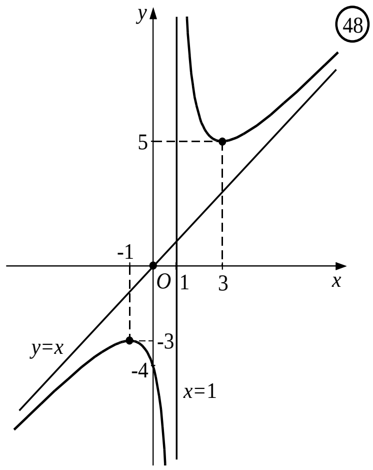
Επομένως, η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

Επίσης έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+4}{x-1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+4}{x-1}=+\infty$.

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f''(x)$		−		−	‖	+		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\boxed{-3}$ Τ.Μ.	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\boxed{5}$ Τ.Ε.	↗	$+\infty$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ 2^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2018

1) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

2) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0,τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

3) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0,τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0.

4) Η συνάρτηση f με $f'(x) = -2ημx + \dfrac{1}{ημ^2x} + 3$, όπου $x \in [\dfrac{\pi}{2}, \pi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

5) Αν $f'(x) = g'(x) + 3$ για κάθε $x \in Δ$, τότε η συνάρτηση $h(x)=f(x) - g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

6) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β] , στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

7) Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και σημείο $x_0 \in [α, β]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

8) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

9) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_o, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

10) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

11) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

12) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

13) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

14) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

15) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

16) Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y = f(x), όταν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

17) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

18) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f·g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0)$

19) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

20) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής.

21) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in Δ$ να ισχύει: f(x) = g(x) + c.

22) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) και ισχύει

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

23) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ, της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f, παραγωγίσιμης στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι $λ = f'(x_0)$.

24) Έστω η συνάρτηση f(x) = συνx , όπου x ∈ IR . Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = -$ ημx.

25) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν :

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

26) Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

27) Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

28) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο $(α,x_o)$ και κοίλη στο $(x_o,β)$ ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_o\ f(x_o))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

29) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ∈(α,β) τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

30)Έστω συνάρτηση f(x) = εφx.Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR_1=IR. – {x/συνx = 0} και ισχύει: $f'(x)=\frac{1}{συν^2 x}$

31) Ισχύει ο τύπος $\left(3^x\right)'=x\cdot 3^{x-1}$, για κάθε x ∈ IR .

32) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και $g(x_o) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o)=\frac{f(x_o)g'(x_o)-f'(x_o)g(x_o)}{[g(x_o)]^2}$$

33) Για κάθε x ≠ 0 ισχύει $\left[\ln|x|\right]'=\frac{1}{x}$

34) Αν μια πραγματική συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

35) Αν $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x\in\Re$, τότε το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

36) Αν $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x\in\Re$, τότε το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

37) Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ είναι +∞ ή –∞, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

38) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε f΄(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

39) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει f(x) = g(x) για κάθε x∈Δ.

40) Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx με πεδίο ορισμού το R, τότε f ΄(x)= – συνx, για κάθε x∈R.

41) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες.

42) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο IR και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει : f΄΄(x) > 0 για κάθε πραγματικό αριθμό x.

43) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

44) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1], παραγωγίσιμη στο (0,1) και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

45) Αν μια συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και
- f(α) = f(β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ ∈ (α, β) τέτοιο, ώστε: f΄ (ξ) = 0.

46) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

47) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο (-1,0).

48) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει τρείς πραγματικές ρίζες.

49) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

50) Ισχύει : (συνx)΄ = ημx, $x \in R$.

51) Αν f(x) = $α^x$, α > 0, τότε ισχύει $(α^x)'$ = $xα^{x-1}$.

52) Για κάθε συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε πραγματικό αριθμό c, ισχύει ότι: $(cf(x))' = f'(x)$, για κάθε x ∈ Δ.

53) Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\Re$ συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0) = 4$, $f'(0) = 3$, $f'(5) = 6$, $g(0) = 5$, $g'(0) = 1$, $g'(4) = 2$, τότε : $(f \circ g)'(0) = (g \circ f)'(0)$

54) Έστω P(x), Q(x) πολυώνυμα διάφορα του μηδενικού. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή P(x) μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

55) Για κάθε x∈ $\mathbb{R}_1$= $\mathbb{R}$–{x/συνx=0} ισχύει: $(εφx)' = -\frac{1}{συν^2 x}$

56) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

57) Ισχύει : $(σφx)' = \frac{1}{ημ^2 x}$, x∈$\mathbb{R}$ – {x / ημx ≠ 0}

58) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

59) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει πάντα f(x) = g(x) για κάθε x_0∈Δ

60) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

61) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν f΄(x) > 0 στο $(α,x_0)$ και f΄(x) < 0 στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

62) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

63) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

64) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

65) Η συνάρτηση f(x) = ln |x|, x є $\mathbf{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ και ισχύει : $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

66) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο Δ τότε $f''(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

67) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, όπου $x_0 \in R \cup \{-\infty,+\infty\}$ τότε : $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

68) Αν $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

69) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

70) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

71) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

72) Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$.

73) Για κάθε συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

74) Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο [α,β] με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ & ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΒΑΣΙΜΕΝΑ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΜΑ Α΄

1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο x_0 τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

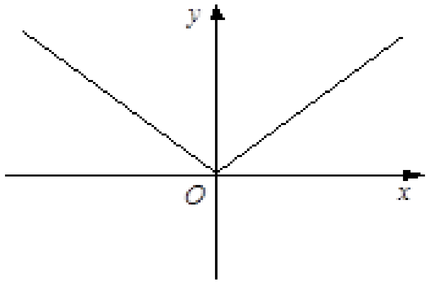
α. Ψ

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$ ενώ,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.



2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta = (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$ με:

- συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Ο παραπάνω ισχυρισμός ισχύει όταν η f είναι ορισμένη σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1\ ,\ x < 0 \\ \ \ 1\ ,\ x > 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

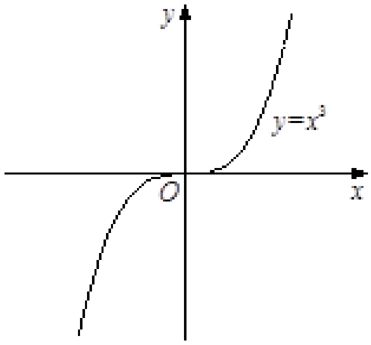
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Αν η *f* είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο *Δ*, η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του *Δ*.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\Re$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Re$.



4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Ένα τοπικό μέγιστο δεν μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο».

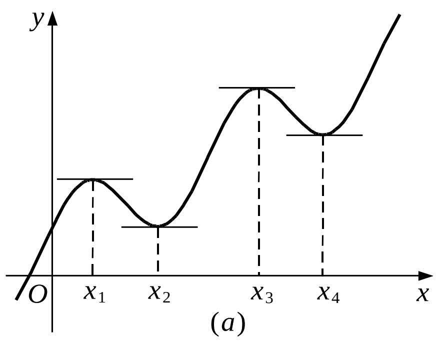
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

<u>Απάντηση :</u>

α. Ψ

β. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε ότι το τοπικό μέγιστο στη θέση x_1 είναι μικρότερο από το τοπικό ελάχιστο στη θέση x_4.



(α)

5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε το μέγιστο αυτής».

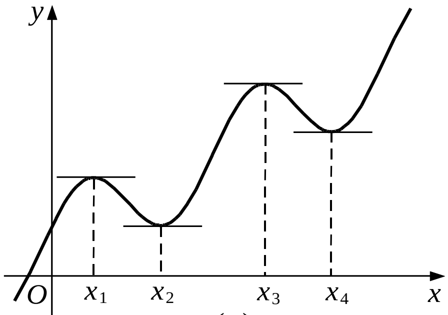
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

<u>Απάντηση :</u>

α. Ψ

β. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Αυτό επιβεβαιώνεται στο παρακάτω σχήμα από το οποίο παρατηρούμε ότι στη θέση x_3, αν και έχουμε το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, δεν είναι το μέγιστο της συνάρτησης αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



(a)

6. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Re$, αν για κάποιο $x_0 \in \Re$ ισχύει $f'(x_0) = 0$ τότε το x_0 είναι υποχρεωτικά θέση τοπικού ακρότατου της f».

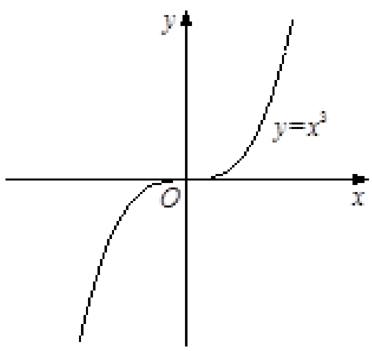
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

<u>Απάντηση :</u>

α. Ψ

β. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2$. Η ρίζα της παραγώγου είναι το 0, δηλαδή $f'(0) = 0$. Εντούτοις, όπως φαίνεται στο σχήμα το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακρότατου της f.



7. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Για κάθε συνάρτηση f κυρτή στο Δ ισχύει $f''(x_0) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ».

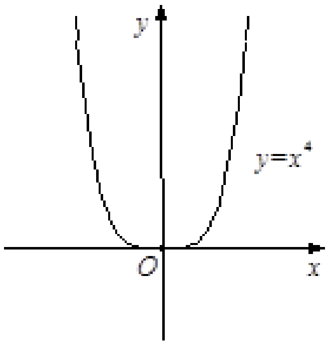
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

<u>Απάντηση :</u>

α. Ψ

β. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\Re$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\Re$, αφού $f''(0) = 0$.



8. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της f ».

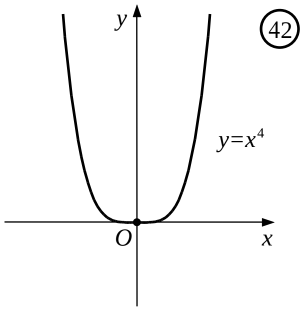
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

<u>Απάντηση :</u>

α. Ψ

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$ (Σχ. 42). Ισχύει $f''(x)=12x^2$ δηλ. $f''(0)=0$. Όμως η f δεν έχει σημείο καμπής στο 0.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο} : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1 ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

60. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση :

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα** της **f** στο **Δ** ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Σχόλια :

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

61. Θεώρημα (2001 Β΄, 2003, 2015 Β΄)

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c \in R$, είναι παράγουσες της f στο Δ.
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c \in R$.

Απόδειξη :

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c \in R$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε , για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν οι σχέσεις $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε : $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x \in \Delta$.

Παρατηρήσεις :

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε η f έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
- Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει, διότι υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ, αλλά έχουν παράγουσα στο διάστημα αυτό.

  Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής, αλλά έχει παράγουσα στο $\Re$ την $F(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

- Αν μια συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.

62. Πίνακας των παραγουσών βασικών συναρτήσεων.

Απάντηση :

Συνάρτηση	Παράγουσα
$f(x)=0$	$F(x)=c$, $c\in\Re$
$f(x)=1$	$F(x)=x+c$, $c\in\Re$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+c$, $c\in\Re$
$f(x)=x^{\alpha}$	$F(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$, $c\in\Re$, $\alpha\neq -1$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$F(x)=\eta\mu x+c$, $c\in\Re$
$f(x)=\eta\mu x$	$F(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c$, $c\in\Re$
$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$F(x)=\varepsilon\phi x+c$, $c\in\Re$
$f(x)=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$F(x)=-\sigma\phi x+c$, $c\in\Re$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+c$, $c\in\Re$
$f(x)=\alpha^x$	$F(x)=\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}+c$, $c\in\Re$

Σχόλια :

- Οι τύποι αυτού του πίνακα ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

- Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε :

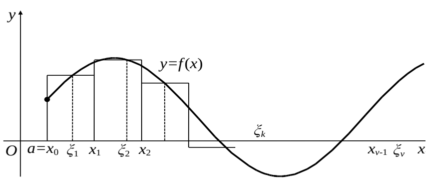
  i. Η συνάρτηση F+G είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f+g

  ii. Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf.

3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

63. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].

Απάντηση :



Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς στο $[\alpha,\beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$. Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα

$\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1,2,\ldots,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$ το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$.

Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ. Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το α στο β”. Δηλαδή : $\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$

<u>Σχόλιο :</u>

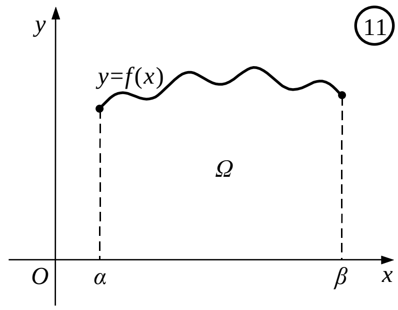
- Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος *S* της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί *α* και *β* ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Η έννοια "όρια" εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου.
- Στην έκφραση $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το γράμμα *x* είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός.

<u>Γεωμετρική ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος :</u>

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $\mathrm{E}(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της *f* τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 11).

Δηλαδή : $\boldsymbol{\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)}$.

Επομένως,



Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\mathrm{E}(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

64. Να γράψετε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

<u>Απάντηση :</u>

α) Ισχύει ότι :

- $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$

- $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

- Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

β) Έστω f,*g* **συνεχείς** συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu \in R$. Τότε ισχύουν:

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$

- $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$ και γενικά

- $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$

γ) Αν η f είναι **συνεχής** σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε ισχύει : $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

Για παράδειγμα, αν $\int_0^3 f(x)dx = 3$ και $\int_0^4 f(x)dx = 7$, τότε

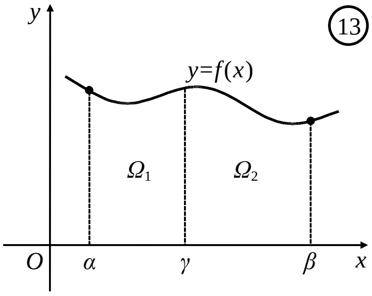
$$\int_3^4 f(x)dx = \int_3^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -\int_0^3 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -3+7=4.$$

Σημείωση :

Αν $f(x)\geq 0$ και $\alpha<\gamma<\beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι: $\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)+\mathrm{E}(\Omega_2)$

αφού $\mathrm{E}(\Omega_1)=\int_\alpha^\gamma f(x)dx$, $\mathrm{E}(\Omega_2)=\int_\gamma^\beta f(x)dx$

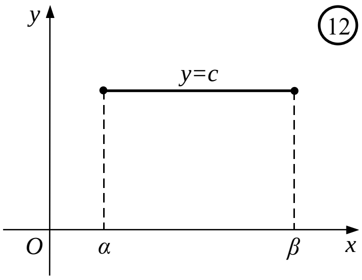
και $\mathrm{E}(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.



δ) Έστω f μια **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$ ..

ε) Αν $c>0$, τότε το $\int_\alpha^\beta c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta-\alpha$ και ύψος c (Σχ. 12).

Δηλ. $\int_\alpha^\beta \boldsymbol{c\,dx = c(\beta-\alpha)}$.



3.5 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$

65. Έστω $F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad ,x\in\Delta$, όπου f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ. Ποια είναι η σχέση της F με την f ;

Απάντηση :

Η συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad ,x\in\Delta$, είναι συνεχής και είναι μια παράγουσα της f στο Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδης θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού) (2002, 2008 Β΄, 2010, 2013)

66. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι : $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$

Απόδειξη :

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$.
Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\Re$ τέτοιο, ώστε :

$G(x)=F(x)+c$. (1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_\alpha^\alpha f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε : $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(t)dt+G(\alpha)$

και άρα $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

67. Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Απάντηση :

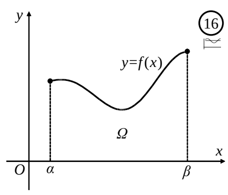
α) Ισχύει ότι : $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

β) Ισχύει ότι: $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

3.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

68. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$, όταν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής .

Απάντηση :

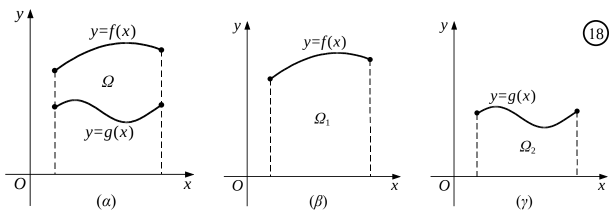


Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

69. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, όταν $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και οι συναρτήσεις f , g είναι συνεχείς.

Απάντηση :

Έστω δυο συνεχείς συναρτήσεις f και g, στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 18α).



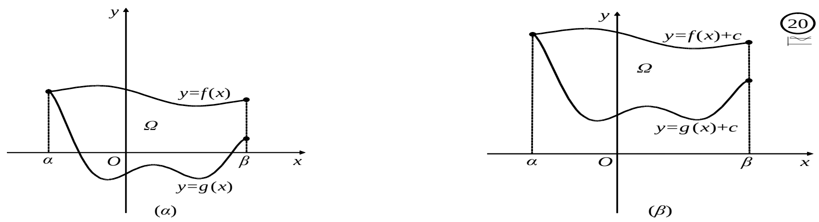
Παρατηρούμε ότι $\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)-\mathrm{E}(\Omega_2)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

Επομένως, $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

70. Να αποδείξετε ότι αν για τις συναρτήσεις f,g είναι $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ δίνεται από τον τύπο: $\mathrm{E}(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

<u>Απόδειξη :</u>

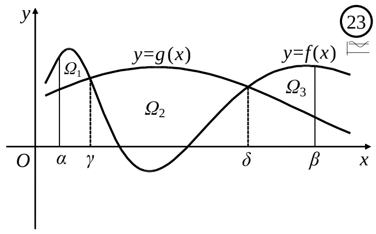
Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c\in R$ τέτοιος, ώστε $f(x)+c\geq g(x)+c\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' .



Επομένως, θα έχουμε: $\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega')=\int_\alpha^\beta[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx$. Άρα $\mathrm{E}(\Omega)=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx$.

71. Να αποδείξετε ότι όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με $\mathrm{E}(\Omega)=\int_\alpha^\beta|f(x)-g(x)|dx$.

<u>Απόδειξη :</u>



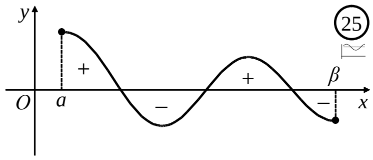
Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1,Ω_2 και Ω_3. Δηλαδή,

$$\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)+\mathrm{E}(\Omega_2)+\mathrm{E}(\Omega_3)=\int_\alpha^\gamma (f(x)-g(x))dx+\int_\gamma^\delta (g(x)-f(x))dx+\int_\delta^\beta (f(x)-g(x))dx$$

$$=\int_\alpha^\gamma |f(x)-g(x)|dx+\int_\gamma^\delta |f(x)-g(x)|dx+\int_\delta^\beta |f(x)-g(x)|dx=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$$

Επομένως, $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$

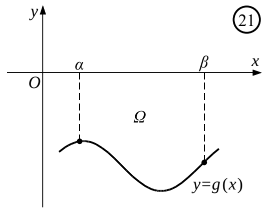
<u>Σχόλιο</u>



Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (Σχ. 25).

72. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με: $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

<u>Απόδειξη :</u>



Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta}[-g(x)]dx = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε:

$E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

<u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ 3^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2018</u>

1) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

2) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,g(x)\,dx .$$

3) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

4) Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και λ ∈ IR *, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

5) Ισχύει η σχέση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].

6) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$

7) Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε x ∈ [α, β] ισχύει f(x) ≥ 0 τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

8) Αν f, g, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)dx$$

9) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α,β,γ∈Δ τότε ισχύει : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

10) Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

11) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει f(x) < 0 για κάθε x∈[α, β], τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα x'x είναι : $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

12) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και ισχύει f(x)≥0 για κάθε x∈[α,β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

13)Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f΄, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]

14) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$

15) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε x∈[α,β], και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.