

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 3^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ****ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :**

- 1) Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x - 1$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = e$ και $x = \lambda$ με $\lambda > 0$ και $\lambda \neq e$.
 - Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(e^2, f(e^2))$
 - Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα x' . **(ΘΕΜΑ Β study4exams)**
- 2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x - 2$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}
 - Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^e f^{-1}(x) dx$ **(ΘΕΜΑ Β study4exams)**
- 3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2e}{x} + 2 \ln x$, $x > 0$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e}$ για κάθε $x > 0$
 - Αν ισχύει $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e}$ για κάθε $x > 0$ όπου $\lambda > 0$ τότε να αποδείξετε ότι $\lambda = e$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e^2$. **(ΘΕΜΑ Γ study4exams)**
- 4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e}{x} + \ln x + 1$, $x > 0$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 3^{\xi-1}$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e^2$. **(ΘΕΜΑ Γ study4exams)**

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 5) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = -2 + \frac{2}{x}$ και $g(x) = 3 \ln x$ με $x > 0$.
- Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$, με $0 < \lambda \neq 1$.
 - Να βρείτε το όριο : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$
 - Να βρείτε το όριο : $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$. **(ΘΕΜΑ Γ study4exams)**
- 6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \lambda x + 3$, $x > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\varepsilon) : y = 3x$ να υπολογίσετε το λ .
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη (ε) της C_f στο $+\infty$
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη (ε) του προηγούμενου ερωτήματος και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.
(ΘΕΜΑ Γ study4exams)
- 7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 + 3 \ln x + 2$ με $x > 0$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda^4 = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda} - 1$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda > 0$.
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^4 f^{-1}(x) dx$.
- 8) Έστω δυο συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι δυο φορές παραγωγίσιμες με $f''(x) = g''(x) - \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$. Αν οι εφαπτομένες στο κοινό σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι παράλληλες να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την C_g και την ευθεία $x = e$.
- 9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 - \frac{e^x}{1 + e^x}$.
- Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon) : y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
 - Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , την (ε) , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \alpha$, $\alpha < 0$.
 - Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} E(\alpha)$
 - Αν το α ελαττώνεται με ρυθμό 2μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\alpha)$ τη χρονική στιγμή που είναι $\alpha = -\ln 2$.

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 10) Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και $xf'(x) - 2\ln x > 0$ για κάθε $x > 0$.
- Να δείξετε ότι $f(x) > \ln^2 x$ για κάθε $x > 1$.
 - Αν $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$, $\lambda > 1$, να αποδείξετε ότι : $E(\lambda) > \lambda \ln^2 \lambda - 2\lambda \ln \lambda + 2\lambda - 2$ και μετά να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.
- 11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$.
- Να βρείτε την ασύμπτωτη (ϵ) της C_f στο $+\infty$
 - Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την (ϵ) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.
- 12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την (ϵ) και τον άξονα $x'x$.
- 13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$.
- Να δείξετε ότι η ευθεία $(\epsilon): y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$
 - Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την (ϵ) και τις ευθείες $x=2$ και $x=\lambda$, $\lambda > 2$.
 - Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$
- 14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - Να βρείτε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την (ϵ) τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=\alpha$, $\alpha > 0$.
 - Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$
 - Αν το α ελαττώνεται με ρυθμό 3μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του $E(\alpha)$ τη χρονική στιγμή που είναι $\alpha=1$.
- 15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x}$ και η ευθεία $(\epsilon): y=x$.
- Να δείξετε ότι η ευθεία ϵ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f
 - Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την (ϵ) και την ευθεία $x=\lambda$, $0 < \lambda < e$.

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

16) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$, $\lambda > 1$.
- Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ 3^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2023

1) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

2) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx.$$

3) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

4) Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

5) Ισχύει η σχέση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

6) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$

7) Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

8) Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)dx$$

9) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

10) Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x' μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x' .

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

11) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα x ' x είναι : $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

12) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

13) Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f' , g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$

14) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathfrak{R}$, αν ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

15) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2023

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1)Λ 2)Σ 3)Σ 4)Σ 5)Σ 6)Λ 7)Λ 8)Λ 9)Σ 10)Σ 11)Λ 12)Σ 13)Λ 14)Λ 15)Σ