

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B .

Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης και περιέχει τις δυνατές τιμές που μπορούμε να δώσουμε στη μεταβλητή x . (Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f το συμβολίζουμε συνήθως D_f ή A_f).

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$.

ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	$P(x) \geq 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = x^2 - 3x + 12$

ii. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$

iii. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

iv. $f(x) = 2x + \sqrt{6 - x}$

v. $f(x) = \frac{3x + 5}{x - 3} + \sqrt{x - 2}$

vi. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1} + \sqrt{2 - x}$

vii. $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

Λύση :

i. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$.

ii. Πρέπει : $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

iii. Πρέπει : $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

iv. Πρέπει : $6 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$. Άρα $D_f = (-\infty, 6]$

v. Πρέπει : $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Άρα $D_f = [2, 3) \cup (3, +\infty)$

vi. Πρέπει : $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1, 2]$. Άρα $D_f = [1, 2]$

vii. Πρέπει : $x \neq 0$ (1) και $1 - x^2 \geq 0$ (2)

Έχω $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$ (2)

Από (1) & (2) $D_f = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$\begin{array}{llll} \text{i. } f(x) = 2x^2 - 7x + 15 & \text{ii. } f(x) = \frac{x - x^2}{12 + 3x} & \text{iii. } f(x) = \frac{x^2 - 7}{2x - 8} & \text{iv. } f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 6} \\ \text{v. } f(x) = 2x^2 + \sqrt{14 - 2x} & \text{vi. } f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} & \text{vii. } f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 8} \end{array}$$

3) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$\begin{array}{llll} \text{i. } f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+5} & \text{ii. } f(x) = \frac{4x}{x-3} + \frac{2x-7}{x^2+3x-4} & \text{iii. } f(x) = \frac{6-4x}{x^2-9} + \frac{2x}{x^2+4x+3} + \frac{5}{2} \\ \text{iv. } f(x) = \frac{2x+6}{|2x-1|-5} & \text{v. } f(x) = \frac{x+1}{5-|1-3x|} & \text{vi. } f(x) = \frac{2x+7}{5+|1-3x|} & \text{vii. } f(x) = \frac{x+3}{|x-2|-|2x-1|} \end{array}$$

4) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$\begin{array}{lll} \text{i. } f(x) = \frac{x+3}{x^3+8} & \text{ii. } f(x) = \frac{x-1}{x^3-9x} & \text{iii. } g(x) = \frac{2x+7}{x^3-4x^2+4x} \\ \text{iv. } g(x) = \frac{5x-12}{x^3+x^2+x} & \text{v. } h(x) = \frac{x-5}{x^4-27x} & \text{vi. } h(x) = \frac{x+2}{16x^6-x^2} \end{array}$$

5) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll} \text{i. } f(x) = \frac{1}{2x-6} + \sqrt{x+2} & \text{ii. } f(x) = \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{4-x}} & \text{iii. } g(x) = \frac{\sqrt{3-|x|}}{x-1} \\ \text{iv. } g(x) = \frac{\sqrt{10-2|x|}}{x^2+3x} & \text{v. } h(x) = \frac{\sqrt{7-|2x-3|}}{|x-1|-2} & \text{vi. } h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \sqrt{2-|x|} \end{array}$$

6) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll} \text{i. } f(x) = \frac{1}{|x|-x} & \text{ii. } f(x) = \frac{1}{|x|+x} & \text{iii. } g(x) = \sqrt{|x|-x} \\ \text{iv. } g(x) = \sqrt{x-|x|} & \text{v. } h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}} & \text{vi. } h(x) = \sqrt{|x|+x} \end{array}$$

7) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & \alpha\nu \ x \geq 0 \\ -x^2+7, & \alpha\nu \ x < 0 \end{cases}$

i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

ii. Να βρείτε τις τιμές: α) $f(-3)$ β) $f\left(\frac{5}{2}\right)$ γ) $f(-1)$ δ) $f(0)$ ε) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ στ) $f(-\sqrt{3})$

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3x^2 + 2x$.

i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii. Να βρείτε τις επόμενες τιμές: i) $f(-2)$ ii) $f(-1)$ iii) $f(0)$ iv) $f\left(\frac{2}{3}\right)$

iii. Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta) - 2(f(\alpha) + f(\beta))$

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x-1) + f(x) = -1$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii. Να βρείτε τις τιμές: α) $f(-2)$ β) $f(0)$ γ) $f(5)$

iii. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: α) $f(-3\alpha)$ β) $f(2a^2)$ γ) $f(\alpha - \beta)$

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$

v. Να λύσετε την ανίσωση $f(x+2) + f(x) \leq 22$

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 16}{2x^2 + 8x}$

i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

iii. Να βρείτε τις τιμές: α) $f(2)$ β) $f(4)$ γ) $f(-4)$ δ) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + a$ για την οποία ισχύει $f(4) = 6$.

i. Να βρείτε τον αριθμό a

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(-3), f(-1), f(0)$ και $f(2)$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 12$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 6$.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+a}{x^2+3x-4}$ για την οποία ισχύει $f(-5) = -2$.

i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii. Να βρείτε τον αριθμό a .

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - 5$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(\alpha + \beta) - f(\alpha) = f(\beta) + 5$

ii. $f(\alpha^2) + f(\beta^2) \geq 2f(\alpha\beta)$

14) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+2) = 3f(2) - 2(x-3)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε: α) την τιμή $f(2)$, β) τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης.

15) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 6|x| + a}{x^2 - 9}$ για την οποία ισχύει $f(5) = \frac{1}{4}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να βρείτε τον αριθμό a .

iii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

v. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \frac{1}{3}$.

16) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3x+a, & \alpha\nu \ x \geq -2 \\ x^2+\beta x+a, & \alpha\nu \ x \leq -2 \end{cases}$ για την οποία ισχύει $f(-1)=-7$.

i. Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-8$.

iii. Να μετατρέψετε το κλάσμα: $\frac{2}{f(-\sqrt{6})+f(\sqrt{6})}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρανομαστή.

i. Να λύσετε την ανίσωση $x(x+1) \leq f(f(-6))$.

17) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+a}$ και η εξίσωση $x^2-3x+1=0$. (1)

Ισχύει: $f(\Delta) = \frac{1}{6}$ όπου Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης (1).

i. Να βρείτε τον αριθμό α και το πεδίο ορισμού της f .

ii. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού, που να έχει ρίζες τους αριθμούς $f(x_1)$ και $f(x_2)$.

18) Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 20m και πλάτος x m.

i. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x .

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 21 m^2 .

19) Σε μια κοινότητα όλοι οι καταναλωτές νερού πληρώνουν 6€ πάγιο κάθε μήνα, ανεξαρτήτως κατανάλωσης. Για τα πρώτα 12 m^3 νερού πληρώνουν $0,60 \text{ €/m}^3$. Για κάθε επιπλέον m^3 από τα 12 m^3 πληρώνουν $0,80 \text{ €/m}^3$. Να βρεθεί συνάρτηση $y = f(x)$ που να δίνει το κόστος y του νερού, αν σε ένα μήνα καταναλωθούν $x \text{ m}^3$ νερό.

20) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 4x-2, & \alpha\nu \ x \leq 1 \\ \frac{x+a}{8}, & \alpha\nu \ x > 1 \end{cases}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση

$x^2 + f(-1) \cdot x + f(75) = 0$ (1), έχει μοναδική ρίζα.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και να βρείτε την ρίζα της εξίσωσης (1).

ii. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν:

$P(A \cap B) = f(4)$, $f(P(A)) = 0$ και $f(P(A \cup B)) = 1$. Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14781

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α)

- i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.
- ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \rightarrow x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \rightarrow y$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 14681

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3 14728

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

(Μονάδες 12)

β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4 12997

Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α΄ λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.

Σχηματίζουμε τα σύνολα A , με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α΄ τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.

Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \rightarrow A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B .

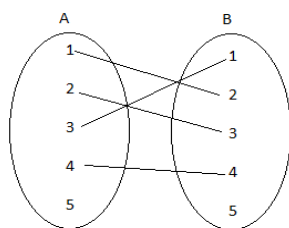
(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \rightarrow A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

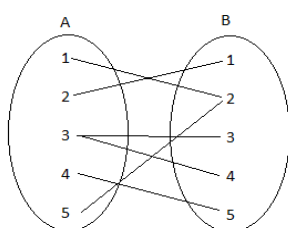
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 5 12908

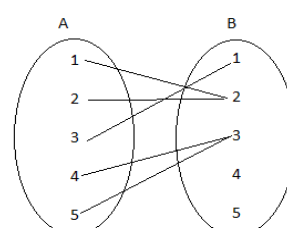
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B.

(Μονάδες 9)

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. (Μονάδες 4)

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών f(A) της συνάρτησης f. (Μονάδες 4)

iii. Να βρείτε τις τιμές f(1) και f(2). (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 6 13031

Δίνεται η συνάρτηση G, με $G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x=2$, $x=0$, $x=-\frac{1}{2}$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G, στο 3. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 7 13032

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1-3x$ και $g(x) = \sqrt{x+5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f(-1) = g(11)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε $f(x) = g(4)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 8 37202

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 9 37189

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 10 37185

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει ότι $f(x) = x^2 + 4x$. (Μονάδες 15)
 β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 11 37175

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8 - x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

- α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$. (Μονάδες 13)
 β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 12 35405

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 15)
 β) Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 13 35298

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

- α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$. (Μονάδες 13)
 β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 14 34446

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 35 + 0,8x$$

- α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά; (Μονάδες 12)
 β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α; (Μονάδες 13)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 15 14562

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$.

- α)
 i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)
 ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x-2}$ για κάθε $x \in A$. (Μονάδες 8)
 β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 16 14629

Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{4}{3}(x - 25)$. (Μονάδες 7)

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε; (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50; (Μονάδες 8)

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 17 14702

Για τις ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και $2x - 1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E της μακέτας σε συνάρτηση του x . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 18 36680

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \text{ και } g(x) = \alpha x - 5, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α . (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$. (Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$. (Μονάδες 5 + 5 = 10)

ΘΕΜΑ 19 36679

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = |x| - 2$. (Μονάδες 9)

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 20 36668

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$) είναι η

$$K = \frac{F - 32}{1,8} + 273 \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278°K μέχρι 283°K . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{F}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 21 36654

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν πάνω σε μπλουζάκια και ίδρυσαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώληση τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος; (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση). (Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 22 14655

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^{\circ}$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε $x+y=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2)$ με $x \in (0,10)$. (Μονάδες 8)

β) i. Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0,10)$. (Μονάδες 7)

ii. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; (Μονάδες 6)

γ) Αν $x=5$, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του; (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 23 34317

Το ποσό που θα πληρώσει (σε ευρώ) ένας κάτοικος μιας πόλης A ο οποίος καταναλώνει x κυβικά μέτρα νερού σε ένα χρόνο, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + 12, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει κάποιος αν:

- i. έλλειπε από το σπίτι του και δεν έχει καταναλώσει καθόλου νερό, (Μονάδες 2)
- ii. έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού, (Μονάδες 3)
- iii. έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη B , το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x) = 12 + 0,6x, \text{ για } x \geq 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης B , να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 24 34184

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές $AB = x$ και $A\Gamma = y$, έτσι ώστε $x + y = 10$.

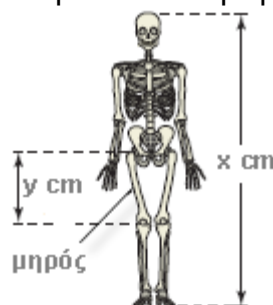
α) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$. (Μονάδες 9)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, να δείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$, για κάθε $x \in (0, 10)$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $x \in (0, 10)$ ώστε το εμβαδόν $E(x)$ να γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$; (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 25 32753

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Ανδρας: $y = 0,45x - 31$

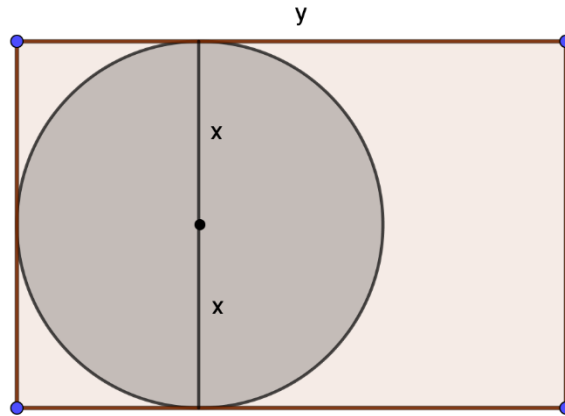
α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 26 14122

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος y cm και περίμετρο 10 cm. Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα x cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



α)

- i. Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y (σε cm) του ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι:

$$y = 5 - 2x, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right). \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

- ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε cm^2) δίνεται από τη σχέση

$$E_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right). \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

β) Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση:

$$E = 10x - (\pi + 4)x^2, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right). \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

γ) Αν το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6 - \pi)\text{cm}^2$ και ο x είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε:

- i. την ακτίνα x του κύκλου. (Μονάδες 6)
 ii. τις διαστάσεις του ορθογωνίου. (Μονάδες 3)

6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

Έστω δυο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Ο τύπος που δίνει την απόσταση των σημείων A και B είναι : $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Αν $A(-4, -2)$ και $B(2, -2)$, να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B.

Λύση : $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 + 4)^2 + (-2 + 2)^2} = \sqrt{36} = 6$

2. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-1, 6)$.

- Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από το B.
- Να βρείτε σημείο Γ που ανήκει στον άξονα x'x, τέτοιο ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ισοσκελές με $(ΓA) = (ΓB)$

Λύση :

- $(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
- Το $\Gamma \in x'x \Leftrightarrow \Gamma(x, 0)$. Επίσης $(\Gamma A) = (\Gamma B) \Leftrightarrow \sqrt{(1 - x)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{(-1 - x)^2 + (6 - 0)^2} \Leftrightarrow$
 $(1 - x)^2 + 4 = [-(1 + x)]^2 + 36 \Leftrightarrow (1 - x)^2 + 4 = (1 + x)^2 + 36 \Leftrightarrow$
 $1 - 2x + x^2 + 4 = 1 + 2x + x^2 + 36 \Leftrightarrow -4x = 32 \Leftrightarrow x = -8$ άρα $\Gamma(-8, 0)$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f (συμβ. C_f) ισχύουν τα παρακάτω :

- Για όλα τα σημεία $M(x, y)$ που ανήκουν στη C_f ισχύει $y = f(x)$. Δηλ. $M(x, f(x))$. Πιο συγκεκριμένα το σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στη C_f , αν και μόνο αν $f(x_0) = y_0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) < 0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
- ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΕΣ
 - ❖ Η C_f τέμνει τον $x'x$ σε σημεία της της μορφής $M(x_0, 0)$, οπότε για να τα βρούμε λύνουμε την εξίσωση $y = f(x) = 0$
 - ❖ Η C_f τέμνει τον $y'y$ σε σημεία της της μορφής $M(0, y_0)$, οπότε για να τα βρούμε, βάζουμε όπου x το 0 δηλ. υπολογίζουμε το $f(0)$
- Για να βρούμε κοινά σημεία C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Για ποιες τιμές του $x \in D_f$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν :

i. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ii. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

Λύση :

i. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$.

Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0$

Έχω $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, \eta, x = 3$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 4x + 3 > 0$ τότε $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

ii. Πρέπει : $1 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0$

Έχω $(1+x)(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $(1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

4. Για ποιες τιμές του $x \in D_f$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , όταν :

i. $f(x) = x^3 + 2x + 1$ και $g(x) = x + 1$ ii. $f(x) = x^3 + x - 2$ και $g(x) = x^2 + x - 2$

Λύση :

- i. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x > 0$

Έχω $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 + 1 = 0$ αδύνατη

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$x^2 + 1$	+		+
Γινόμενο	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$

- ii. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + x - 2 > x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 > 0$

Έχω $x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ή, $x = 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x^2	+	0	+		+
$x - 1$	-		-	0	+
Γινόμενο	-	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$. Να εξετάσετε αν τα σημεία A(1,5) και B(3,7) ανήκουν στην καμπύλη της f .

6. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2\alpha x + \beta$ να διέρχεται από τα σημεία A(-1,3) και B(1,7).

7. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ να διέρχεται από τα σημεία A(0,3), B(-1,0) και Γ(-2,-1).

8. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες.

i. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

ii. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+9}$

iii. $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$

9. Δίνεται η επόμενη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{αν } x \geq 2 \\ |x-3| - 2, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην γραφική παράσταση της f:

i. A(5,10) ii. B(-1,2) iii. Γ(2,-1) iv. Δ(3,0) v. E(1,0) vi. Z(4,-1)

10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} |x| - 3, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 - 4, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4} \cdot (|2x - 1| - 3)$. Να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού της f,
- ii. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

12. Το σημείο M(-3,-5) ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + \lambda x - 8$. Να βρείτε:

- i. τον αριθμό λ,
- ii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

13. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 + \beta x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από τα σημεία A(-3,5) και B(5,10).

- i. Να βρείτε τις τιμές των α και β.
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- iii. Αν είναι M(2,f(2)) και N(-1,f(-1)), να βρείτε την απόσταση (MN).

14. Οι γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων: $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$ και

$g(x) = x^2 + \lambda x - 5$ τέμνουν τον άξονα x'x στο ίδιο σημείο. Να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού της f
- ii. τον αριθμό λ
- iii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| - 5$. Να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού της f
- ii. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- iii. τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται:
 - α) πάνω από τον άξονα x'x
 - β) κάτω από τον άξονα x'x

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = -x^2 - 2x + 15$. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία:

- i. η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x
- ii. η C_g βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x
- iii. η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |2x - 7| + a$ η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 4.

- i. Να βρείτε τον αριθμό a .
- ii. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η C_f βρίσκεται:
 - α) πάνω από τον άξονα $x'x$
 - β) κάτω από τον άξονα $x'x$.

18. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + a, & \text{αν } x < -1 \\ |x+1| - a, & \text{αν } x \geq -1 \end{cases}$ της οποίας η γραφική

παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -3. Να βρείτε:

- i. την τιμή του a
- ii. τα διαστήματα, στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- iii. τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη 6.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{a - x^2}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-4,3)$. Να βρείτε τον αριθμό a και το πεδίο ορισμού της f .

20. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x^2 + \lambda x + \mu}{|2x - 1| - 5}$ η οποία τέμνει τον

άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $\frac{5}{2}$ και διέρχεται από το σημείο $M(2,6)$. Να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού της f
- ii. τους αριθμούς λ και μ
- iii. τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$
- iv. το συμμετρικό του σημείου $N(4, f(4))$ ως προς:
 - α) τον άξονα $x'x$,
 - β) τον άξονα $y'y$,
 - γ) την αρχή των αξόνων,
 - δ) τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14072

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)
- β) Ανήκει το σημείο $M(1,3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ; (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 14306

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{5} + 3$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε το $f(-24)$. (Μονάδες 7)
- γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $(1,3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3 14596

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ με $x \neq -1$.

- α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$. (Μονάδες 13)
- β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 14603

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

- α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. (Μονάδες 6)
- β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 5 14628

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$, $x \neq 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$. (Μονάδες 7)
- β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f . (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$. (Μονάδες 10)

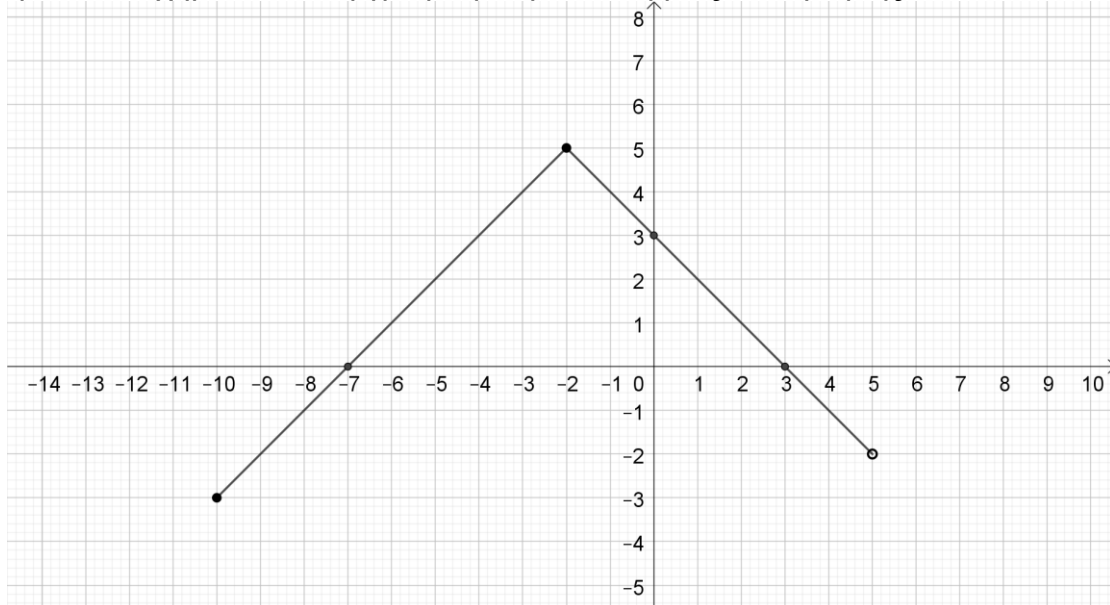
ΘΕΜΑ 6 12680

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)
 γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 7 12910

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$. (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$. (Μονάδες 6)
 γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$. (Μονάδες 4)
 δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 8 12686

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 9 13322

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2+2} + \sqrt{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g . (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1$, $x=-2$, $x=2$. (Μονάδες 9)
 γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 10 12913

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της παραπάνω συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 11 12729

Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;

(Μονάδες 6)

β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

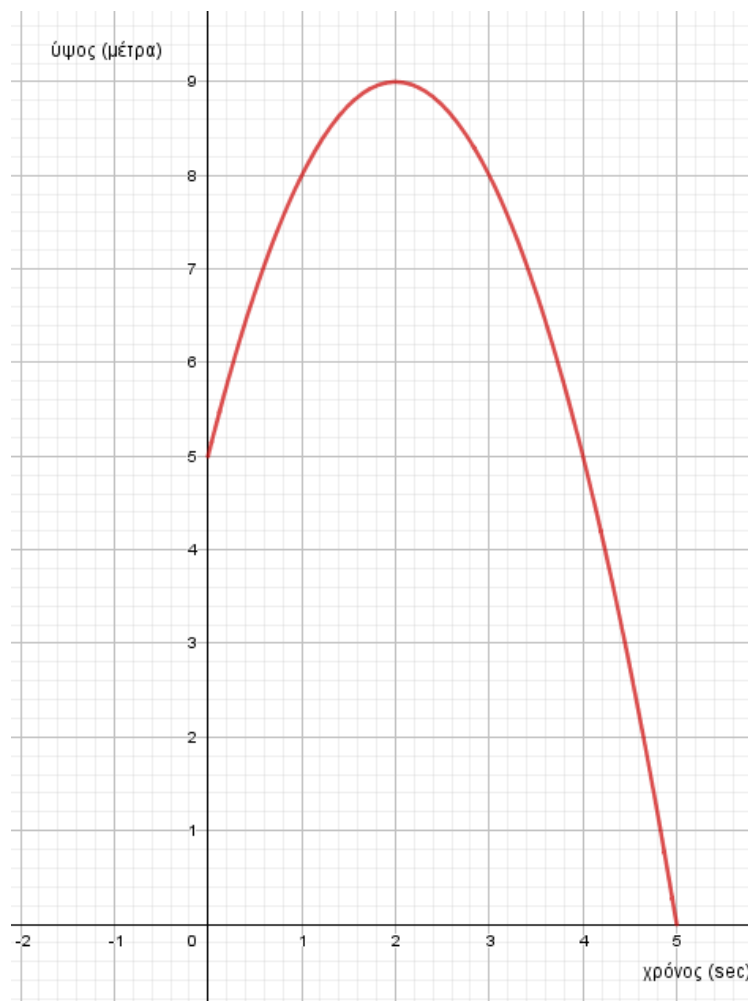
(Μονάδες 6)

γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.

(Μονάδες 7)

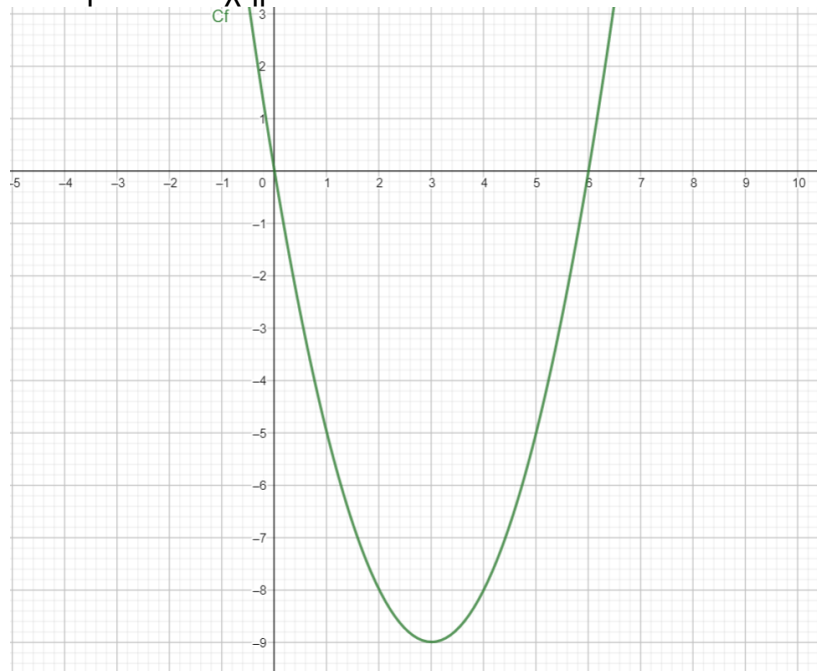
δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 12 15000

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του σχήματος:

α) Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0, 1, 3, 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < 0$.

(Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 13 34159

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 14 36885

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 15 36889

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-5) + f(0) + f(3)$.

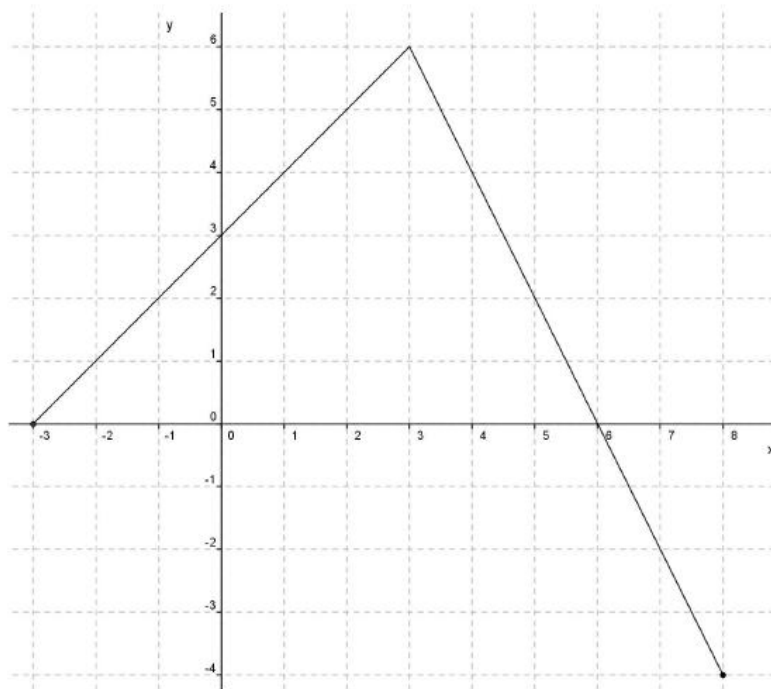
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 16 35034

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 17 35413

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 18 14760

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g . (Μονάδες 8)
 β) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 19 14810

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 10$. (Μονάδες 5)
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)
 γ) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha < \beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.
 i. Να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2\alpha + 3\beta}{5} < \beta$ (Μονάδες 6)
 ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τεταγμένη $x_0 = \frac{2\alpha + 3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 20 14225

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-2)(x^2 - 5x + 4)}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A . (Μονάδες 5)
 β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $x \in A$. (Μονάδες 7)
 γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 3$. (Μονάδες 6)
 δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = x^4 - 6x - 4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)

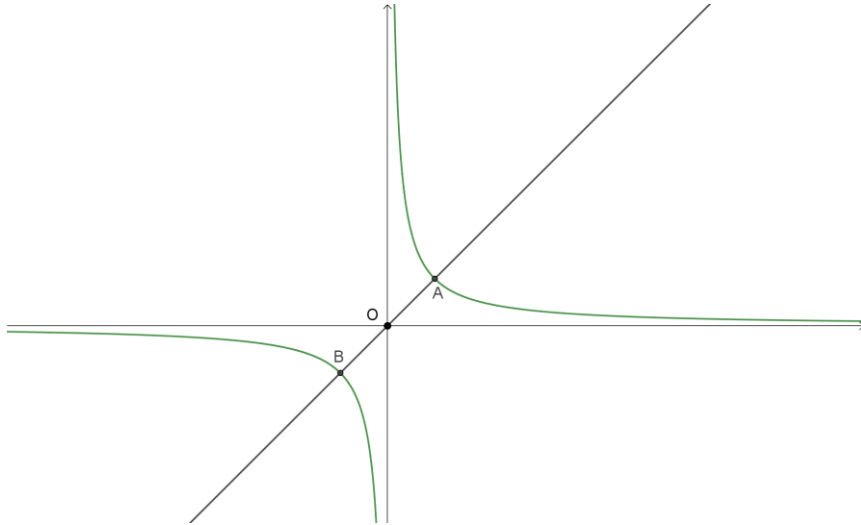
ΘΕΜΑ 21 14459

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ και η ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)
 β) Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < 1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τεταγμένες. (Μονάδες 10)
 γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)| \leq \frac{1}{2}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 22 14925

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ και η ευθεία AB με εξίσωση $y = x$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B και να δείξετε ότι το $O(0,0)$ είναι το μέσο του AB. (Μονάδες 9)

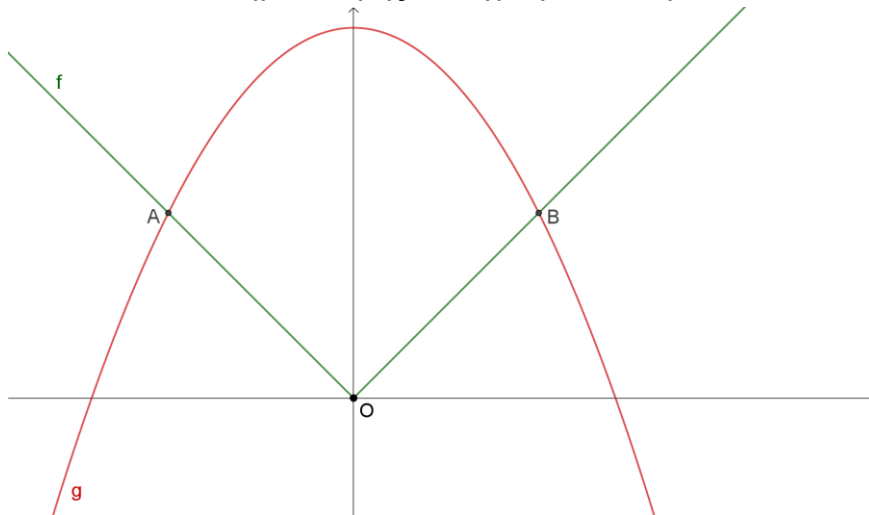
Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f .

β) Να δείξετε ότι και το συμμετρικό M' του M ως προς το $O(0,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 8)

γ) Αν $A(1,1), B(-1,-1)$, $M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB) \leq (MM')$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(AB) = (MM')$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 23 14926

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = |x|$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B. (Μονάδες 10)

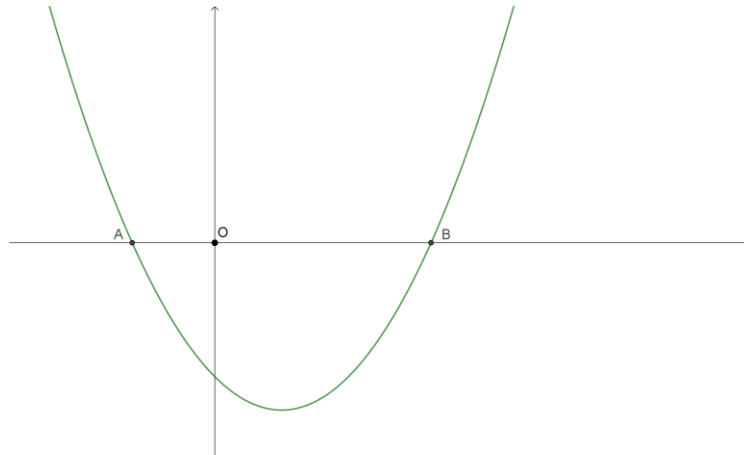
β) Αν $A(-1,1)$ και $B(1,1)$,

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι $f(x) < g(x)$. (Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 24 14961

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$.



Αν $A(\omega, 0)$, $B(\phi, 0)$

α) Να δείξετε ότι :

i. $\omega + \phi = 1$.

ii. $\omega \cdot \phi = -1$.

(Μονάδες 4+4)

β) Να δείξετε ότι $(OB) > (OA)$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta > \phi$.

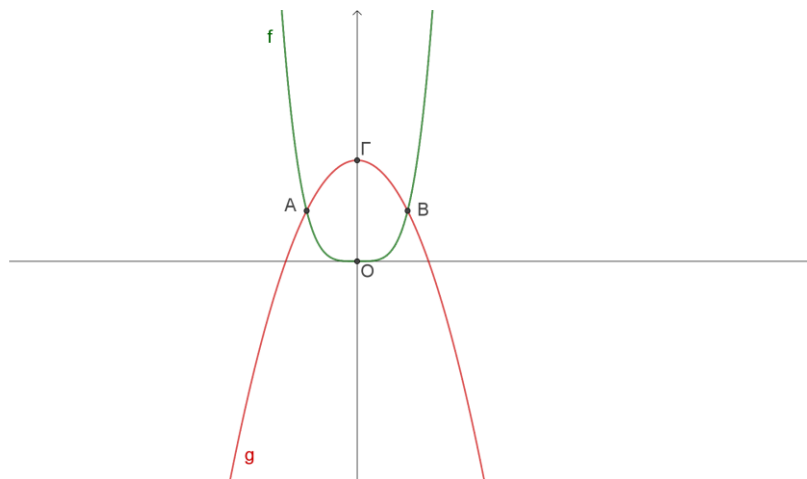
(Μονάδες 6)

δ) Να δείξετε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 25 14307

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ.

(Μονάδες 9)

Αν $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$, $\Gamma(0, 2)$

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

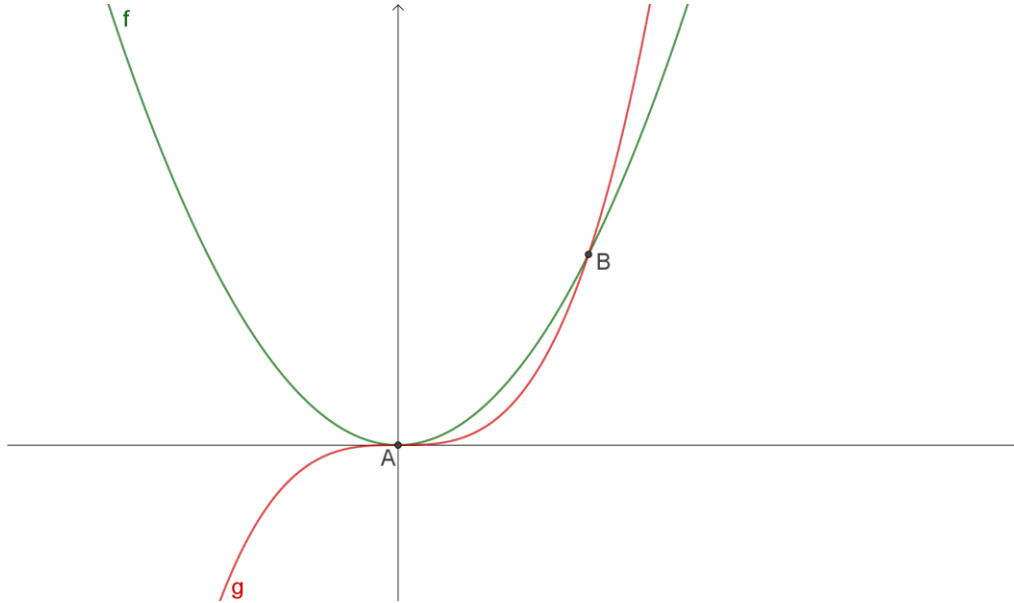
(Μονάδες 6)

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β).

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 26 14665

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ που τέμνονται στα σημεία A, B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B. (Μονάδες 8)

Έστω $A(0,0), B(1,1)$.

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει ότι $x^3 < x^2$. (Μονάδες 6)

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$ να δείξετε ότι

i. $(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2$. (Μονάδες 3)

ii. $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$. (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 27 13479

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$.

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές. (Μονάδες 9)

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 8)

ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε την ακέραια τιμή του μ . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 28 14745

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.

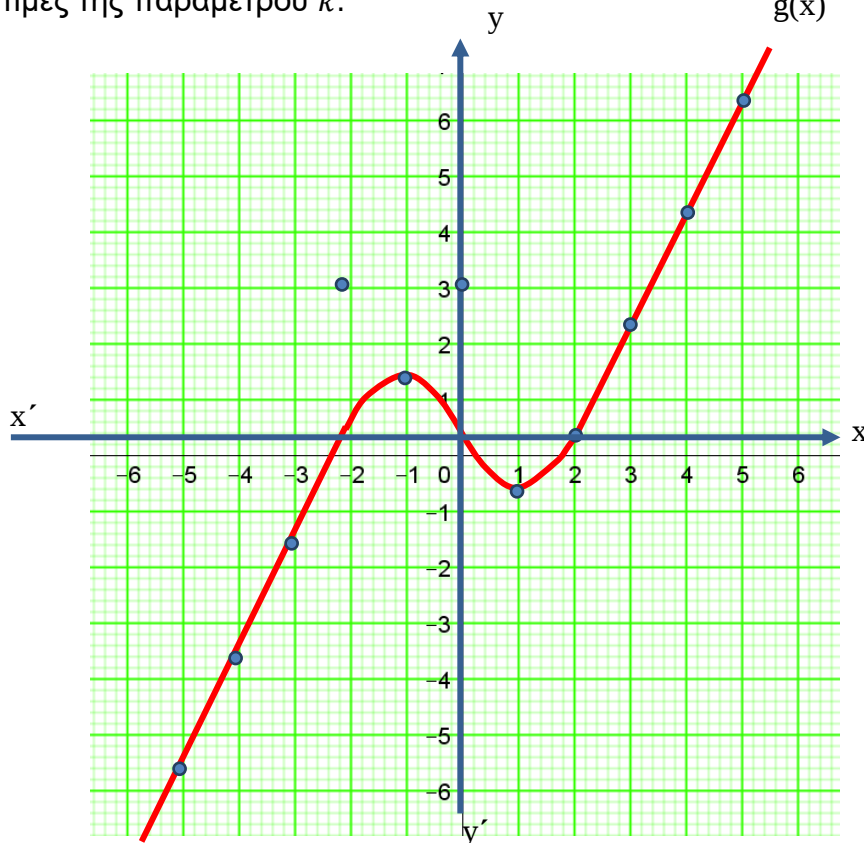
α) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq g(x) \leq 0$. (Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$. (Μονάδες 7)

γ)

i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x) = \frac{4}{5}$ και $g(x) = -1$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k . (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 29 14185

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (Μονάδες 6)

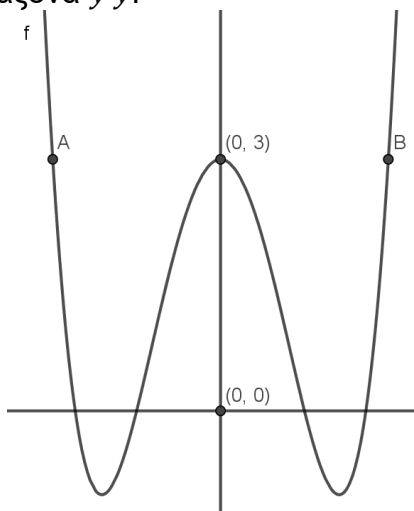
β) Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$. (Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 1$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 30 13454

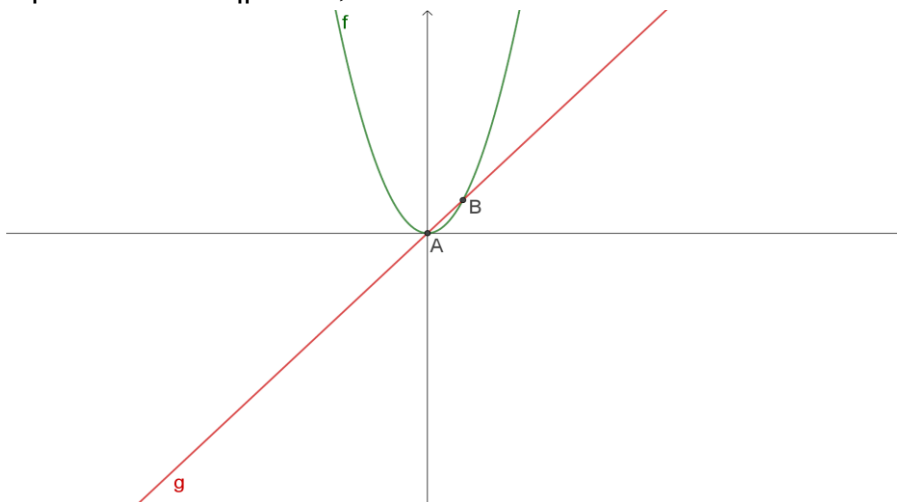
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^4 - 4x^2 + \gamma$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



- α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$. (Μονάδες 6)
- β) Αν $A(a^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3a, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f . (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)
- δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 31 13557

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$ που τέμνονται στα σημεία A, B.



- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B. (Μονάδες 7)
- β) Αν $A(0, 0), B(1, 1)$, τότε:
- Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 5)
 - Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)
- γ) Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\beta \neq 0$, να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha| < |\beta|$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 32 14190

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη. (Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο M της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta > 0$. Από το M φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έστω A και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το A ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$. Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $OAM\Delta$ είναι $[\sqrt{2}(\beta + 1)]^2$. (Μονάδες 9)

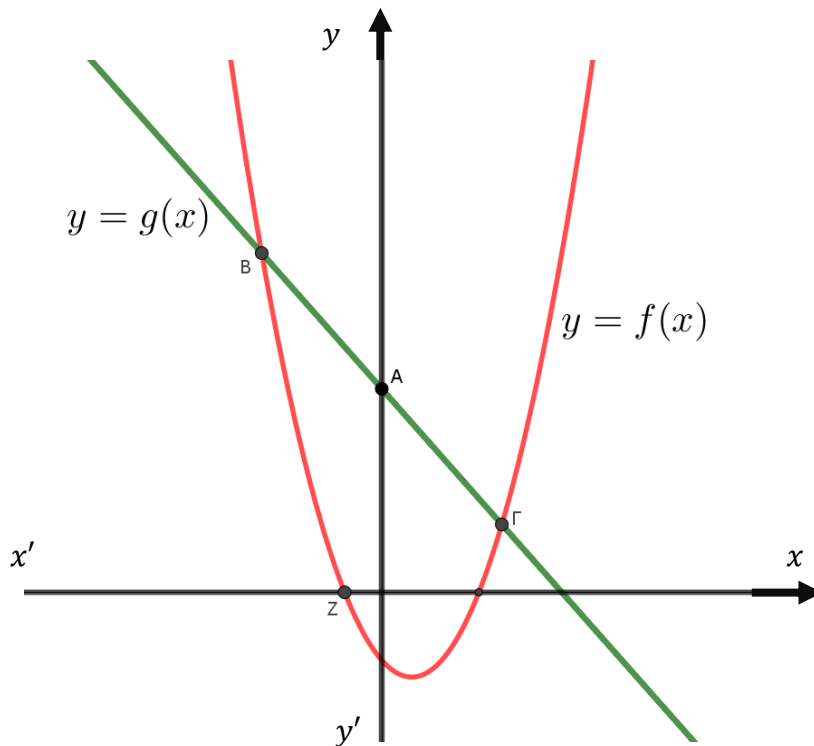
ΘΕΜΑ 33 12628

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και $g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Z . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$. (Μονάδες 6)

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α , η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1. (Μονάδες 9)



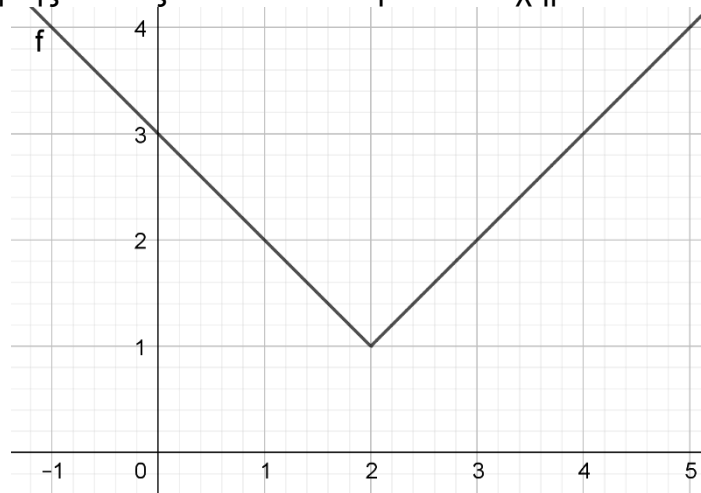
ΘΕΜΑ 34 12941

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|}$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f . (Μονάδες 6)
 α) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$. (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες. (Μονάδες 6)
 δ) Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 35 12914

Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- α)
 i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία; (Μονάδες 4)
 ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i). (Μονάδες 5)
 β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$. (Μονάδες 8)
 γ)
 i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$; (Μονάδες 4)
 ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i). (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 36 13120

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)
 β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4, 4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)
 δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 37 13027

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$ όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\beta = -1$

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

(Μονάδες 7)

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) - 2kg(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 38 13313

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο σύνολο A .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 39 12788

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$.

(Μονάδες 9)

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 40 12944

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$ για οποιοδήποτε αριθμό x με $x \neq 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|\alpha| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 41 13030

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$.

Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

(Μονάδες 7)

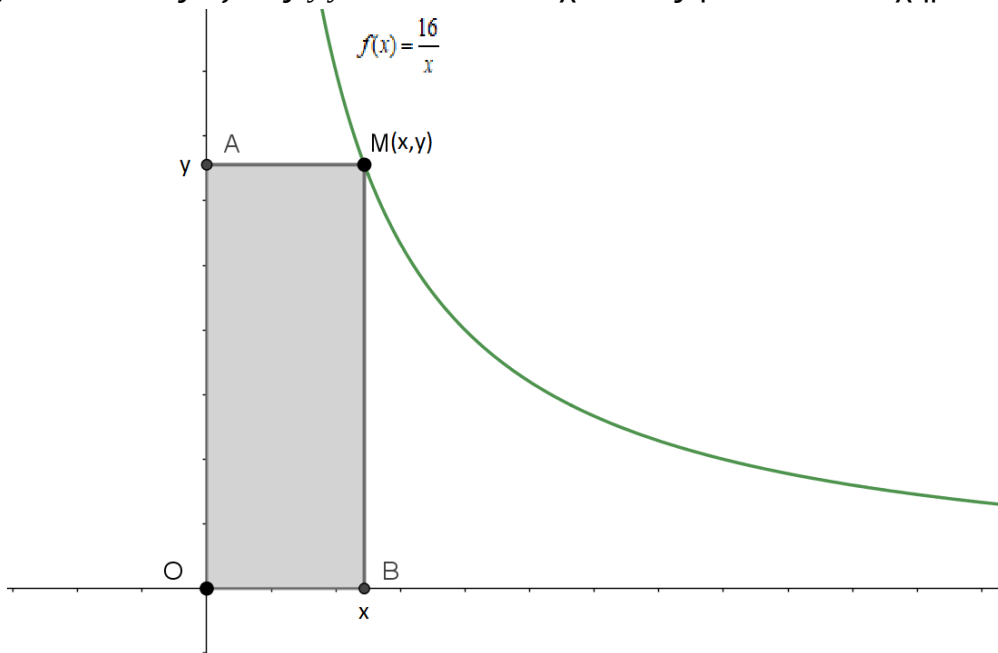
γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 42 13090

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{16}{x}$, $x > 0$.

Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω A και B οι προβολές του M στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια $OAMB$ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}$, $x > 0$ όπου x η τετμημένη του M .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M ώστε το ορθογώνιο $OAMB$ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 7)

γ) Αν M' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο $OAM'B$ να είναι τετράγωνο τότε :

i. Να δείξετε ότι το M' έχει τετμημένη 4.

(Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο $OAM'B$ έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια $OAMB$, δηλαδή ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 43 34309

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = x + \alpha \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α , οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 44 16153

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 7)

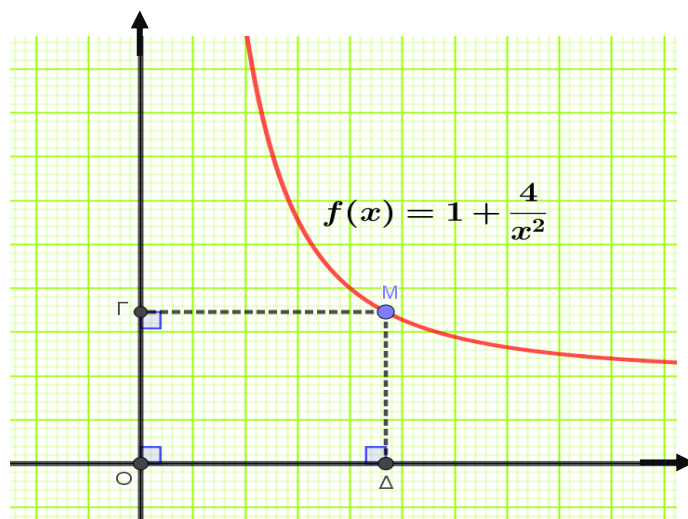
γ) Έστω $\alpha > 0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου M της γραφικής παράστασης της f . Αν ονομάσουμε E το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΟΓΜΔ$ του σχήματος, να αποδείξετε ότι

i. $E = \alpha + \frac{4}{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

ii. $E \geq 4$.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 45 33754

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μια ημέρα, η εταιρία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0,20x$$

Όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α ο οποίος, σε μια ημέρα, ταξίδεψε 400Km;

(Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψε ένας πελάτης ο οποίος για μια ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ;

(Μονάδες 5)

γ) Μια άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 80 + 0,10x$$

όπου, όπως και προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

(Μονάδες 10)

δ) Αν

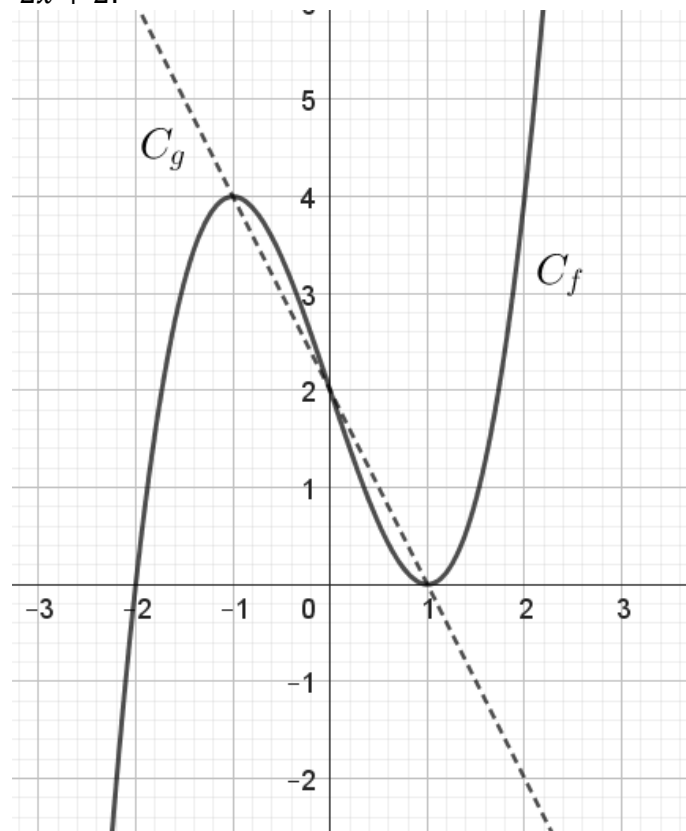
$$f(x) = 60 + 0,20x \quad \text{και} \quad g(x) = 80 + 0,10x$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή κάθε μιας από τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα το ερωτήματος γ).

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 46 32742

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

- α) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = -2x + 2$, (Μονάδες 6)
- β) τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$ και $f(1)$, (Μονάδες 6)
- γ) τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , (Μονάδες 6)
- δ) τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 47 33701

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x) = |x - 1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
- β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 4)
- γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 12)

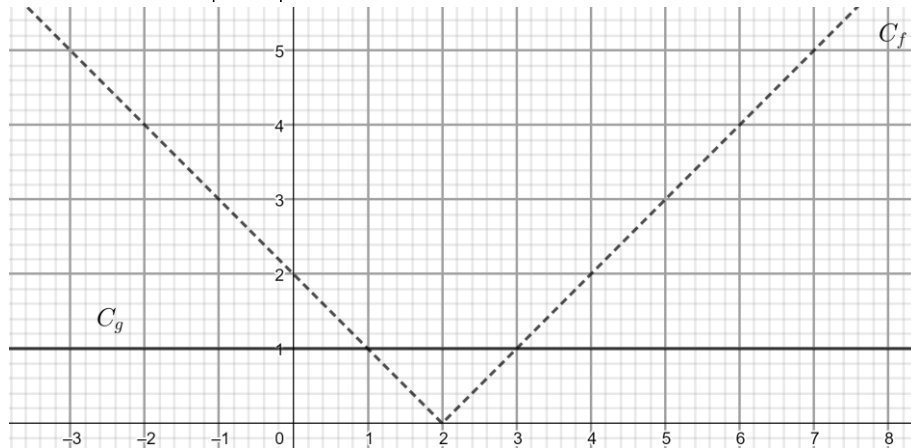
ΘΕΜΑ 48 14786

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(2 - \lambda^2, \mu)$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- α) Αν τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ . (Μονάδες 7)
- β) Αν επιπλέον το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ . (Μονάδες 6)
- γ) Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$
 - i. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A, B . (Μονάδες 7)
 - ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 49 33597

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x-2|$ και $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.



α) Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε

i. τα σημεία τομής των C_f και C_g .

(Μονάδες 5)

ii. τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g .

(Μονάδες 5)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα αι) και αιι).

(Μονάδες 10)

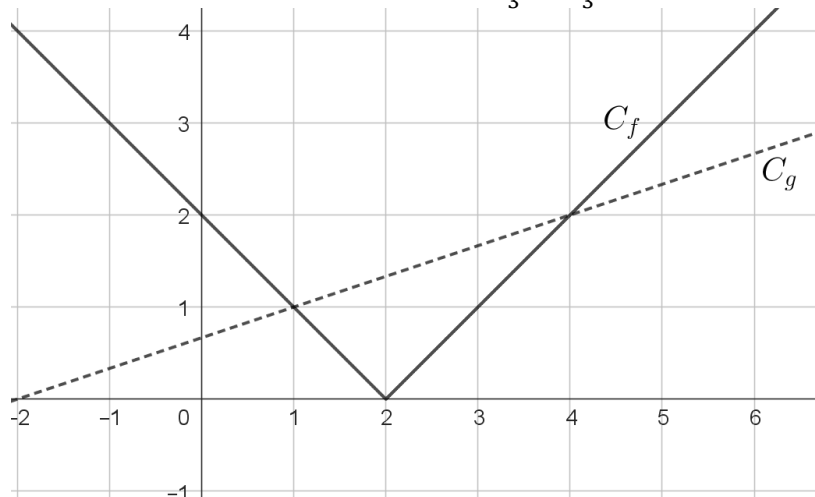
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η παράσταση $A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 50 34312

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

$$f(x) = |x-2| \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$



α) Με βάση το σχήμα, να εκτιμήσετε την τιμή των συντεταγμένων των σημείων τομής γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

(Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς η παράσταση: $K = \sqrt{3|2-x|} - (x+2)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 51 14763

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3\sqrt{x^2-8x+\lambda}}{x-4} + 2$, για $x \neq 4$ και $\lambda \geq 16$.

α) Να βρείτε το $\lambda \geq 16$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο της $M(0, -1)$. (Μονάδες 7)

β) Αν $\lambda = 16$, τότε:

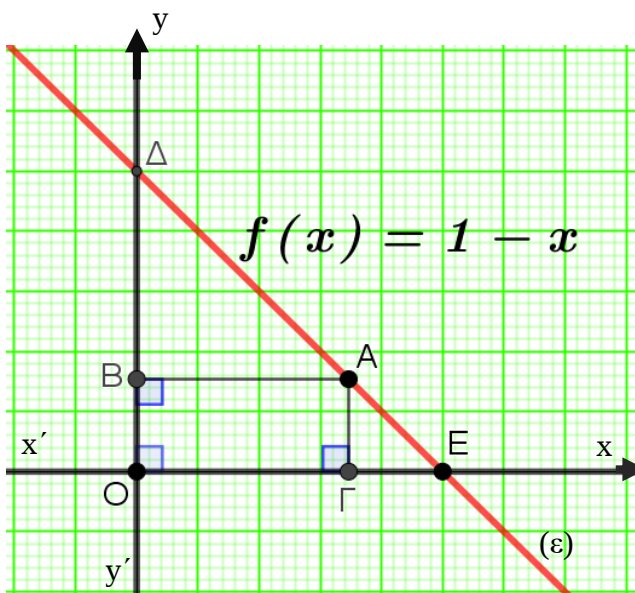
- Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases}$. (Μονάδες 7)
- Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 5)
- Για $x < 4$, να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f των οποίων η απόστασή τους από το σημείο $A(-1, -1)$ είναι 10 μονάδες μήκους. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 52 14744

α) Να αποδείξετε ότι $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . Πότε ισχύει το ίσον; (Μονάδες 8)

β) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση (ε) της συνάρτησης $f(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο Α, με τετμημένη α , κινείται επί της ευθείας (ε) και μεταξύ των σημείων Δ και Ε. Φέρνουμε από το Α καθέτους στους άξονες και έστω Β και Γ τα σημεία τομής με $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.

- Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 10)
- Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου ΑΒΟΓ είναι $\frac{1}{4}$. Για ποια θέση του σημείου Α επιτυγχάνεται αυτή η τιμή; (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 53 36657

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 0$, παράμετρος.

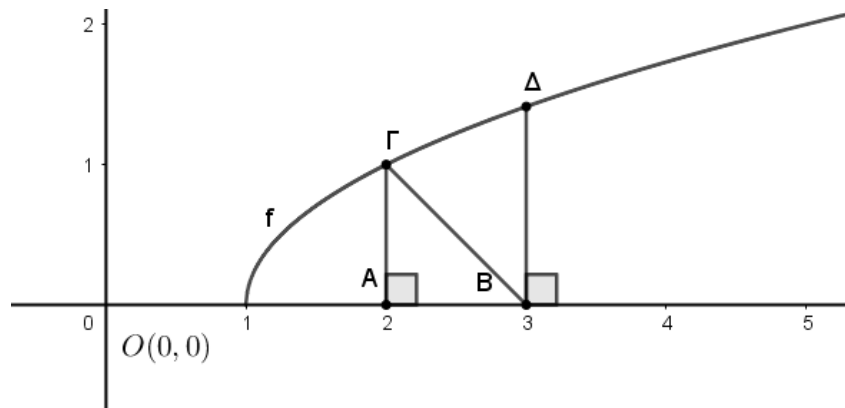
α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους C_f, C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g , να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε να ισχύει $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 54 14771

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-a}$ όπου $a \in \mathbb{R}$.



- α) Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$. (Μονάδες 6)
 β) Αν $a = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 5)
 γ)
 iii. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι $(2,1)$ και $(3,\sqrt{2})$ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)
 iv. Να βρείτε το μήκος του τμήματος $B\Gamma$. (Μονάδες 4)
 v. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 55 35385

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$. (Μονάδες 6)
 β) Για $\beta = -1$
 (i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$. (Μονάδες 5)
 (ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$. (Μονάδες 7)
 (iii) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 56 36681

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(x) = (\lambda+1)x^2 - (\lambda+1)x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$. (Μονάδες 3)
 β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 4)
 γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2,0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)
 δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 57 36684

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
(Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .
(Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 58 36676

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .
(Μονάδες 7)
- β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:
- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.
(Μονάδες 4)
 - Για $\alpha = 2$ υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ;
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
(Μονάδες 4)
- γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ και στη συνέχεια ότι για $\alpha = 3$, $\alpha = -2$, $\alpha = 1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 59 37206

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

- α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.
(Μονάδες 10)
- β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + a$. Να δείξετε ότι:
- Αν $a > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , h έχουν δύο κοινά σημεία.
 - Αν $a < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , h δεν έχουν κοινά σημεία.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 60 35409

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \lambda^2 - 4$. (Μονάδες 05)

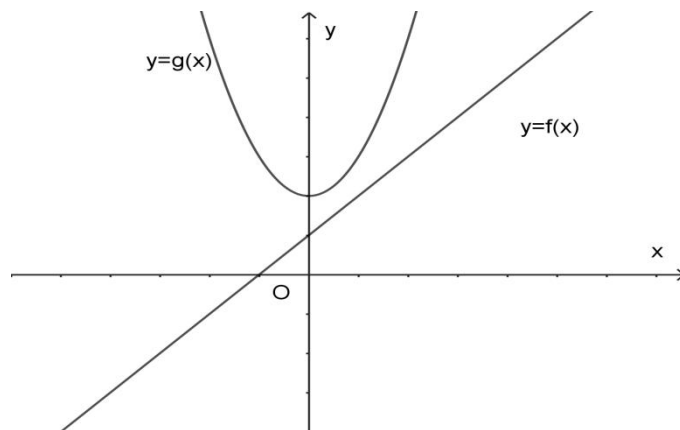
β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με

$$f(x) = \lambda x - \lambda + 2 \text{ και } g(x) = x^2 - \lambda + 3, \lambda \in \mathbb{R}.$$

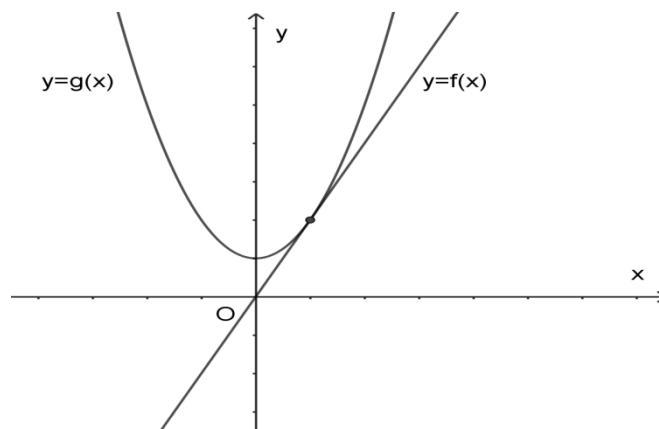
i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία μπορούμε να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$. (Μονάδες 05)

ii. Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ .

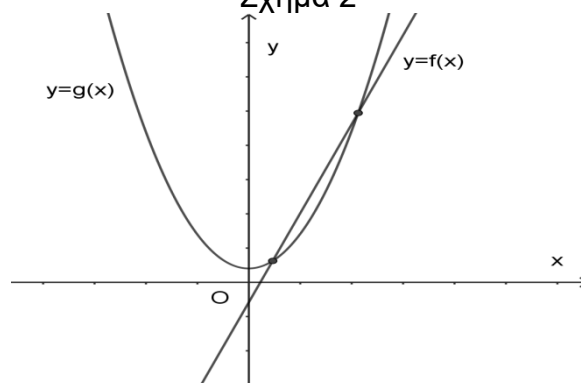
Με δεδομένο ότι $\lambda \in \{1, 2, 4\}$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ σε καθένα από τα σχήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 15)



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

ΘΕΜΑ 61 35410

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20$. (Μονάδες 05)

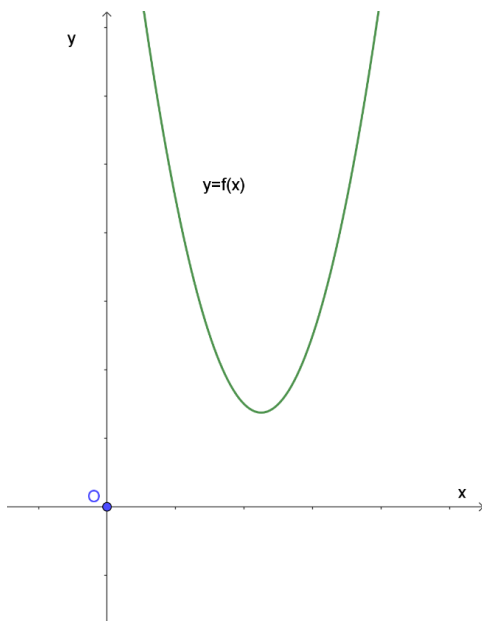
β) Θεωρούμε την συνάρτηση f , που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5.$$

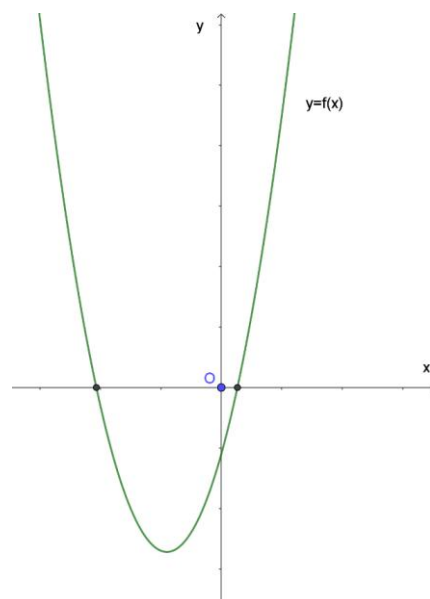
Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ .

i. Για τα δύο πρώτα σχήματα δίνεται ότι η παράμετρος $\lambda \in \{-2, 4\}$. Να βρείτε σε ποια τιμή του λ αντιστοιχεί το καθένα από τα σχήματα αυτά, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

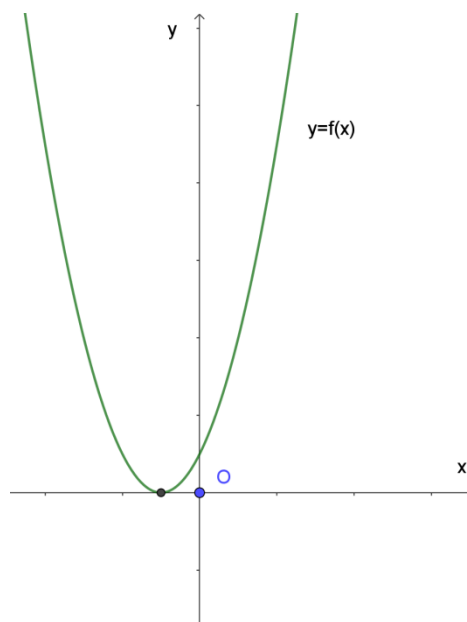
ii. Για το σχήμα 3 να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



Σχήμα 1



Σχήμα 2



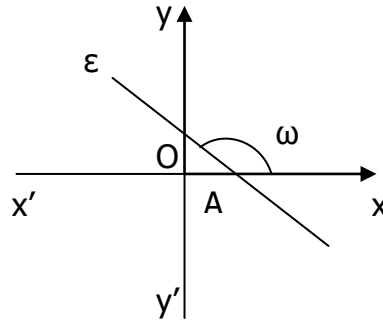
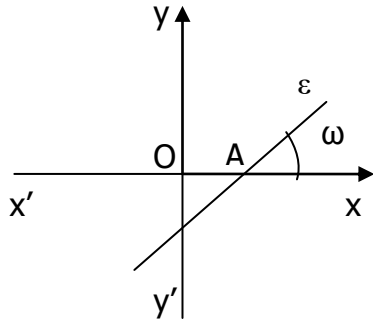
Σχήμα 3

6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = ax + \beta$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

➤ Γωνία ευθείας (ε) με τον άξονα x'x

Έστω Οxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Α.



Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας x'x όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ε τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα x'x**.

- Αν $(ε) // x'x$, είναι $\omega = 0$
- Αν $(ε) // y'y$, είναι $\omega = 90^\circ$
- Σε κάθε περίπτωση είναι $0 \leq \omega < 180^\circ$

➤ Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

Συντελεστής διεύθυνσης λ ευθείας, ονομάζεται η εφαπτομένη της γωνίας την οποία σχηματίζει η ευθεία, με τον άξονα x'x.

Δηλ.: $\lambda = \tan \omega$ με $0 \leq \omega < 180^\circ$. (Δίνονται οι εφαπτομένες :)

$\tan 0^\circ = 0$	
$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$
$\tan 45^\circ = 1$	$\tan 135^\circ = -1$
$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$	$\tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\tan 90^\circ = \text{δεν ορίζεται}$	

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 :

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$ είναι μια ευθεία με εξίσωση : $(ε) : y = ax + \beta$
- Κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x έχει συντελεστή διεύθυνσης: $a=0$. $((ε) // x'x \Leftrightarrow \alpha_\varepsilon = 0)$
- Δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για ευθεία παράλληλη του άξονα y'y. $((ε) // y'y \Leftrightarrow \alpha_\varepsilon = \text{δεν ορίζεται})$
- Αν $\alpha_\varepsilon > 0$ τότε η (ε) σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα x'x
- Αν $\alpha_\varepsilon < 0$ τότε η (ε) σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x'x

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :

Αν μια ευθεία (ε) περνάει από τα σημεία: $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\alpha_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ($x_1 \neq x_2$, διότι αν $x_1 = x_2$ η AB είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, άρα δεν έχουμε συντελεστή διεύθυνσης).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (AB) η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(-3, -5)$ και $B(-9, 1)$. Ποια είναι η γωνία που σχηματίζει η (AB) με τον άξονα $x'x$;

Λύση : $\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-5)}{-9 - (-3)} = \frac{6}{-9 + 3} = \frac{6}{-6} = -1$, δηλ. $\lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\omega = -1$, άρα $\omega = 135^\circ$ ή $\omega = \frac{3\pi}{4}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 :

Μια ευθεία γενικά έχει τη μορφή (ε) : $y = \alpha x + \beta$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. είναι ο συντελεστής διεύθυνσης.

- Για να βρούμε τα κοινά σημεία δυο ευθειών **λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους**. Αν το σύστημα έχει μια λύση οι ευθείες τέμνονται, αν έχει άπειρες λύσεις τότε ταυτίζονται ενώ αν είναι αδύνατο τότε οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Για να βρούμε το σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα $x'x$, **θέτουμε $y=0$ στην εξίσωση της**.
- Για να βρούμε το σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα $y'y$, **θέτουμε $x=0$ στην εξίσωση της**.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2. Δίνονται οι ευθείες (ε) : $y = 2x + 4$ και (ζ) : $y = \frac{7}{2}x + 1$. Να βρείτε :

- α_ε , α_ζ
- το σημείο τομής των (ε) και (ζ)
- τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες

Λύση :

i. (ε) : $y = 2x + 4$ άρα $\alpha_\varepsilon = 2$, (ζ) : $y = \frac{7}{2}x + 1$ άρα $\alpha_\zeta = \frac{7}{2}$

- ii. Για να βρω το σημείο τομής των (ε) και (ζ) θα λύσω το σύστημα των εξισώσεων

τους :
$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = \frac{7}{2}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ 2y = 7x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 4 \\ -7x + 2y = 2 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -8 \\ -7x + 2y = 2 \end{cases} \text{ προσθέτω}$$

κατά μέλη και έχω $-3x = -6 \Leftrightarrow x = 2$ άρα πάω στην πρώτη και έχω :

$4 \cdot 2 - 2y = -8 \Leftrightarrow 8 - 2y = -8 \Leftrightarrow 2y = 16 \Leftrightarrow y = 8$. Άρα το σημείο τομής των (ε) και (ζ) είναι το σημείο Α(2,8)

iii. Για να βρούμε σημείο τομής της (ε) με τον χ'χ θέτω $y = 0$ στην εξίσωση της :

(ε): $y = 2x + 4 \Leftrightarrow 0 = 2x + 4 \Leftrightarrow x = -2$, άρα το σημείο τομής της (ε) με τον χ'χ είναι το Β(-2,0)

Για να βρούμε σημείο τομής της (ε) με τον γ'γ θέτω $x = 0$ στην εξίσωση της :

(ε): $y = 2x + 4 \Leftrightarrow y = 2 \cdot 0 + 4 \Leftrightarrow y = 4$, άρα το σημείο τομής της (ε) με τον γ'γ είναι το Γ(0,4)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : (ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ & ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΕΥΘΕΙΩΝ)

- Δύο ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες αν και μόνο αν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, δηλ. $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.
- Δύο ευθείες είναι κάθετες αν και μόνο αν έχουν συντελεστές διεύθυνσης αντιθετοαντίστροφους, δηλ. $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Να βρείτε τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ για τον οποίο :

- Οι ευθείες $y = (3\lambda - 5)x + 4$ και $y = -x + 12$ είναι παράλληλες.
- Οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = (\lambda - 1)x + 2$ και $(\varepsilon_2): y = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)x - 3$ είναι κάθετες.

Λύση :

- Έστω $(\varepsilon): y = (3\lambda - 5)x + 4$ και $(\zeta): y = -x + 12$. $(\varepsilon) \parallel (\zeta) \Leftrightarrow \alpha_\varepsilon = \alpha_\zeta \Leftrightarrow 3\lambda - 5 = -1 \Leftrightarrow 3\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$
- Έστω $(\varepsilon_1): y = (\lambda - 1)x + 2$ και $(\varepsilon_2): y = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)x - 3$. $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda - \frac{\lambda^2}{2} - 1 + \frac{\lambda}{2} = -1 \Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 - 2 + \lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon: y = -2x + 4$ και $\zeta: y = 3x + 9$.

- Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών.
- Να σχεδιάσετε τις ευθείες ε και ζ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

5. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x + \lambda}{3}$ διέρχεται από το σημείο Α(-1,-2).

- Να βρείτε τον αριθμό λ.
- Να βρείτε το f(2).
- Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

6. Η ευθεία $\varepsilon: y=(2\lambda-6)x+\lambda-1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- Να βρείτε τον αριθμό λ .
 - Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .
7. Η ευθεία $\varepsilon: y=(3-\lambda)x+\lambda+1$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .
- Να βρείτε τον αριθμό λ .
 - Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .
8. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=|x+4|-2|x-2|-2x$
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$
 - Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.
9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}+x+3$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
10. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x-1|+\lambda x+\mu$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 5 και τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 3.
- Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .
 - Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .
11. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: y=(\alpha+2)x+7\alpha+4$ και $\zeta: y=(\beta-\alpha)x-\beta-2\alpha$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $M(-3,2)$ και ισχύει ότι $\varepsilon \parallel \zeta$. Να βρείτε:
- τις τιμές των α και β
 - το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ζ με τους άξονες.
12. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=-2x+2$, $\varepsilon_2: y=4x-1$ και $\varepsilon_3: y=-3x+6$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας:
- που είναι παράλληλη στην ε_1 και διέρχεται από το σημείο τομής των ε_2 και ε_3
 - που διέρχεται από το σημείο τομής των ε_1 και ε_3 και το σημείο της ε_2 με τετμημένη -3.
13. Η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x-4$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$, ενώ το τρίγωνο που σχηματίζει με τους άξονες έχει εμβαδόν 4 τ.μ. Να βρείτε τον αριθμό λ .
14. Η ευθεία $\varepsilon: y=\frac{\lambda+1}{2} \cdot x+1-\lambda$ διέρχεται από το σημείο $A(-4,5)$. Να βρείτε:
- τον αριθμό λ ,
 - την ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το σημείο $B(4,6)$
 - το σημείο στο οποίο η ευθεία ε τέμνει την ευθεία ζ που βρήκατε στο (β).
15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x|$ και έστω A και B τα σημεία της γραφικής της παράστασης με τετμημένες -3 και 5 αντίστοιχα.
- Να βρείτε τις τεταγμένες των σημείων A και B , καθώς και την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A και B .
 - Να σχεδιάσετε την C_f και την παραπάνω ευθεία ε στο ίδιο σύστημα αξόνων.
 - Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $|x| \leq \frac{x+15}{4}$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :

6.3 Η Συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 13471

Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-1, -5)$, $\Gamma(27, 50)$ και την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο A είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$. (Μονάδες 11)
 β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 2 14575

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$. (Μονάδες 8)
 γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3 13400

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$.

- α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες. (Μονάδες 9)
 γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 13318

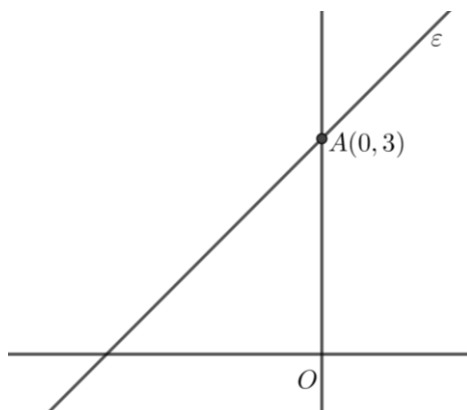
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x \in R$.

- α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$, $[f(-\sqrt{2})]^2$. (Μονάδες 12)
 β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5 14641

Η παρακάτω ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε . (Μονάδες 7)
 β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε . (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
 (Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$)



ΘΕΜΑ 6 12630

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο (1, 1).

- α) Να βρείτε τις τιμές των α και β . (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 8)
 γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 7 12939

Έστω η ευθεία $\varepsilon_1: y = \alpha x + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο A (0, -6) και τον άξονα $x'x$ στο σημείο B(-3, 0).

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β . (Μονάδες 13)
 β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 6)
 γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 8 13033

Δίνεται η ευθεία (ε): $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

- α)
 i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε). (Μονάδες 4)
 ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα; (Μονάδες 4)
 β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία A(6, 1), B(-2, 3) και Γ(8, 0) είναι σημεία της ευθείας (ε). (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο ($k, 5$) να είναι σημείο της ευθείας (ε). (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 9 13178

Δίνεται το σημείο M(3,4).

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το O(0,0). (Μονάδες 9)
 β) Δίνεται το σημείο N(-3, λ) με $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία OM.
 i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)
 ii. Αν N(-3, -4) να εξετάσετε αν τα σημεία M, N είναι συμμετρικά ως προς το O. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 10 13054

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2: y = (3 - 4\alpha)x + 4, \alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε:
 i. Τις εξισώσεις των ευθειών. (Μονάδες 6)
 ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 11 12730

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$.

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο A(0, 3). (Μονάδες 13)
 β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 12 12856

Δίνεται ευθεία $\varepsilon: y=ax+5$. Αν η ευθεία $\delta: y=-3x-6$ είναι παράλληλη στην (ε) , τότε:

α)

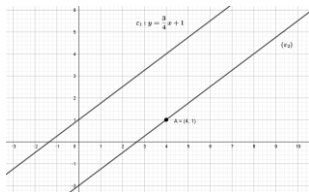
- i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε . (Μονάδες 6)
- ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$; (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 13 12631

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση

$y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο A (4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1) .



- α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2) . (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) . (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 14 12684

Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο A (-4, 1)

και είναι παράλληλη στην (ε_1) .

- α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) . Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες; (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15 35201

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β . (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 16 37183

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \text{ και } f(1) = 3.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 17 21239

Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -2)$ και διέρχεται από το σημείο $B(-2, -4)$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β . (Μονάδες 12)

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$, να βρείτε για ποιες τιμές του x η ευθεία βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ άξονα. (Μονάδες 13)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 18 13507

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = px^2 + (6-p)x + \left(\frac{5}{2}p - 3\right)$, με παράμετρο $p \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης για $p = 0$ και $p = 2$. Για ποια από αυτές τις τιμές του p η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία; (Μονάδες 4)

β)

i. Για $p = 0$ και $p = 2$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα, το οποίο και να βρείτε. (Μονάδες 6)

ii. Συμβαίνει το ίδιο (δηλαδή να έχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα) και για άλλες τιμές της παραμέτρου $p \in \mathbb{R}$; (Μονάδες 6)

γ) Για $p \neq 0$, να βρείτε για ποιες τιμές του p η γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα έχει δυο κοινά σημεία με τον $x'x$ άξονα. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 19 14184

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 4)
 β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση. (Μονάδες 8)
 γ) Αν είναι $f(x) = x+2$, $x \neq -1$, τότε:
 i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$. (Μονάδες 7)
 ii. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 20 14320

Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι :

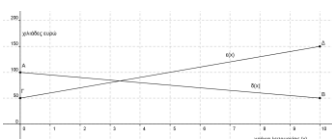
$$f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x \in [0,6] \\ 16, & x \in (6,9] \\ 25-x, & x \in (9,12] \end{cases} \quad \text{και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.}$$

- α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα. (Μονάδες 6)
 β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία :
 i. Διατηρείται σταθερή.
 ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου. (Μονάδες 4+7=11)
 γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 21 14477

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Η ευθεία $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



- α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας. (Μονάδες 4)

β)

- i. Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές. (Μονάδες 15)
- ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

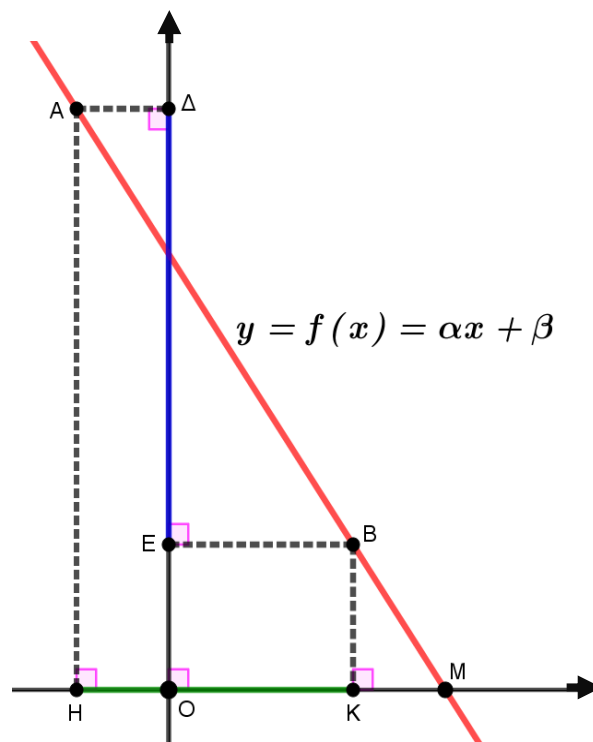
ΘΕΜΑ 22 14556

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία A και B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, των οποίων οι προβολές στους άξονες x', y' είναι τα σημεία H, Δ και K, E αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμο τμήματα HK και ΔE έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{3}{2}$. (Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο M έχει τετμημένη 6, να αποδείξετε ότι $\beta = 9$. (Μονάδες 7)

γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα OK έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο E και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. (Μονάδες 9)



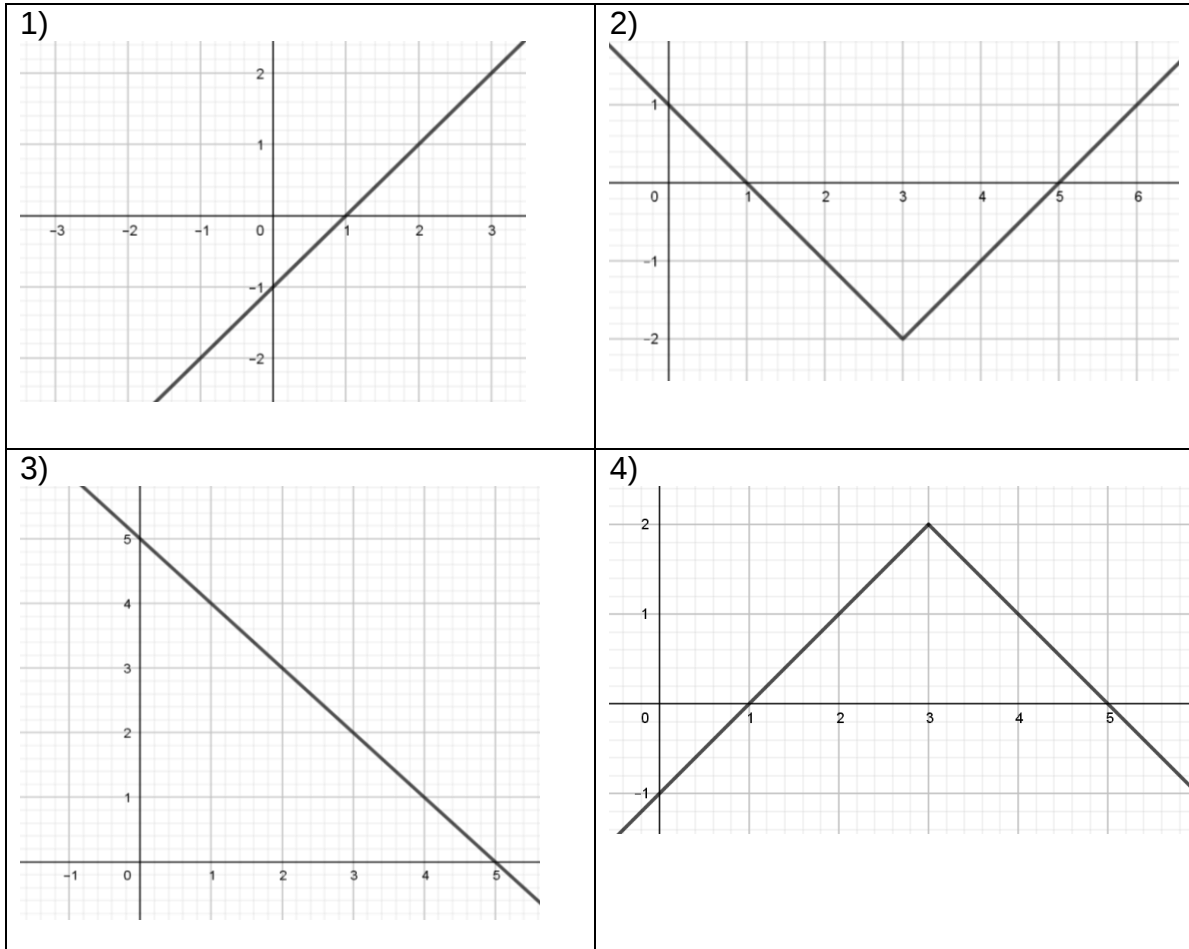
ΘΕΜΑ 23 12681

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-3| + 4 - (|6-2x| + 2)$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - |x-3|$. (Μονάδες 5)

β) Αφού δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x < 3 \\ 5-x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η γραφική παράσταση της f είναι:



(Μονάδες 9)

γ)

iii. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2 - |x-3| > -1$ (Μονάδες 5)

iv. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 24 12682

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x-1)^2$ και $g(x) = |x-1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$

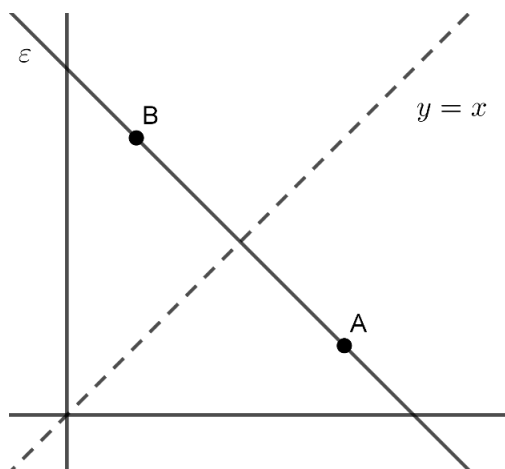
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ -x+3, & x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g . (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 25 13298

Τα σημεία A και B είναι σημεία του 1^{ου} τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες του σημείου B . (Μονάδες 3)
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα A και B έχει κλίση $\alpha = -1$. (Μονάδες 6)
- γ) Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2, 4)$ αντίστοιχα, τότε:
- Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B . (Μονάδες 8)
 - Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 26 13367

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

- α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
- β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:
- Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$. (Μονάδες 6)
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες. (Μονάδες 5)
 - Να σχεδιάσετε την ευθεία ε . (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 27 13473

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$.

- α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A . (Μονάδες 6)
- Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.
- β) i. Να δείξετε ότι $A=2$. (Μονάδες 4)
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 3| - |x - 1| = 2$. (Μονάδες 5)
- γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3-x$ και $g(x)=x-1$ για $1 \leq x \leq 3$. (Μονάδες 6)
- ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x) - g(x)|=2$. (Μονάδες 4)

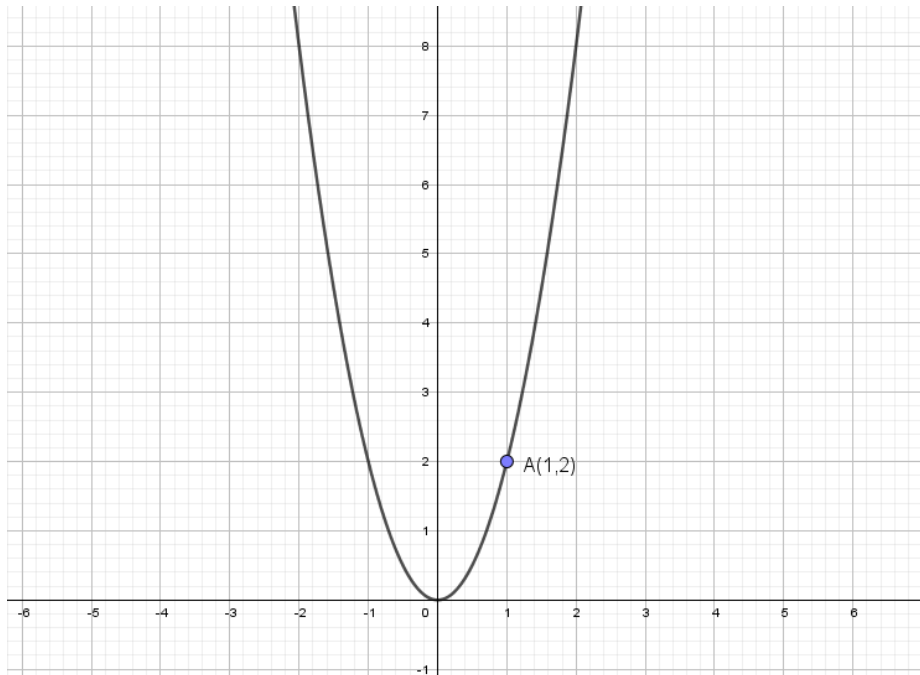
ΘΕΜΑ 28 12921

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|\kappa|x - 2$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - \kappa^2, \kappa \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.
(Μονάδες 5)
- β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ .
(Μονάδες 8)
- γ) Για $\kappa = -3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .
(Μονάδες 5)
- δ) Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (ΑΒ).
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 29 12942

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2, x \in \mathbb{R}$ με παράμετρο α .



- α) Αν το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $\alpha = 2$.
(Μονάδες 6)
- β)
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1,6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$.
(Μονάδες 4)
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.
(Μονάδες 4)
- γ)
- Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x + 4$.
(Μονάδες 4)
 - Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 30 13055

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x) = f(2-x)$.

(Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β , ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 31 12999

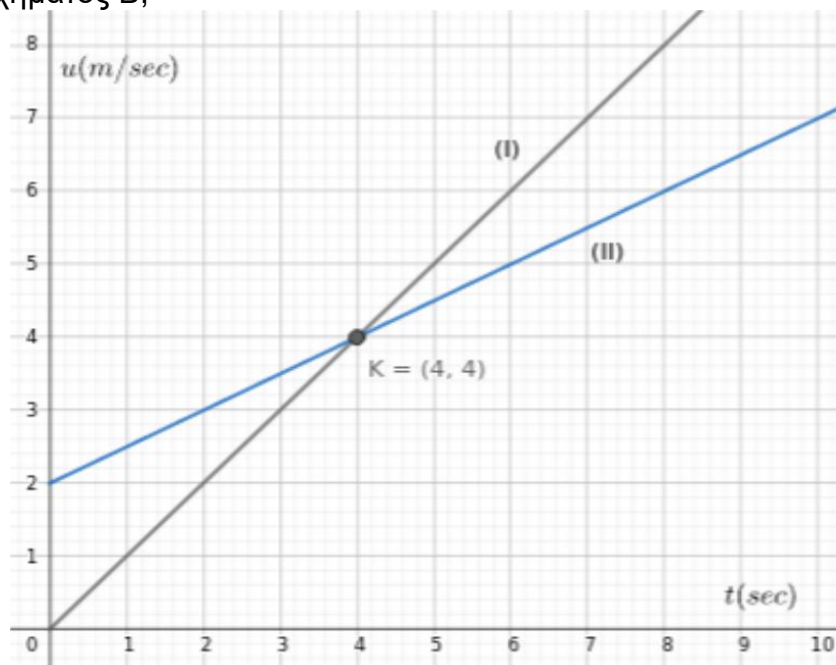
Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u = u_0 + a \cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και a η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

(Μονάδες 6)

β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση η-ρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec. Οι παρακάτω ευθείες (I),(II) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.

i) Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;



(Μονάδες 6)

ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή t sec, $t \in (3,5)$.

(Μονάδες 7)

iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 32 13314

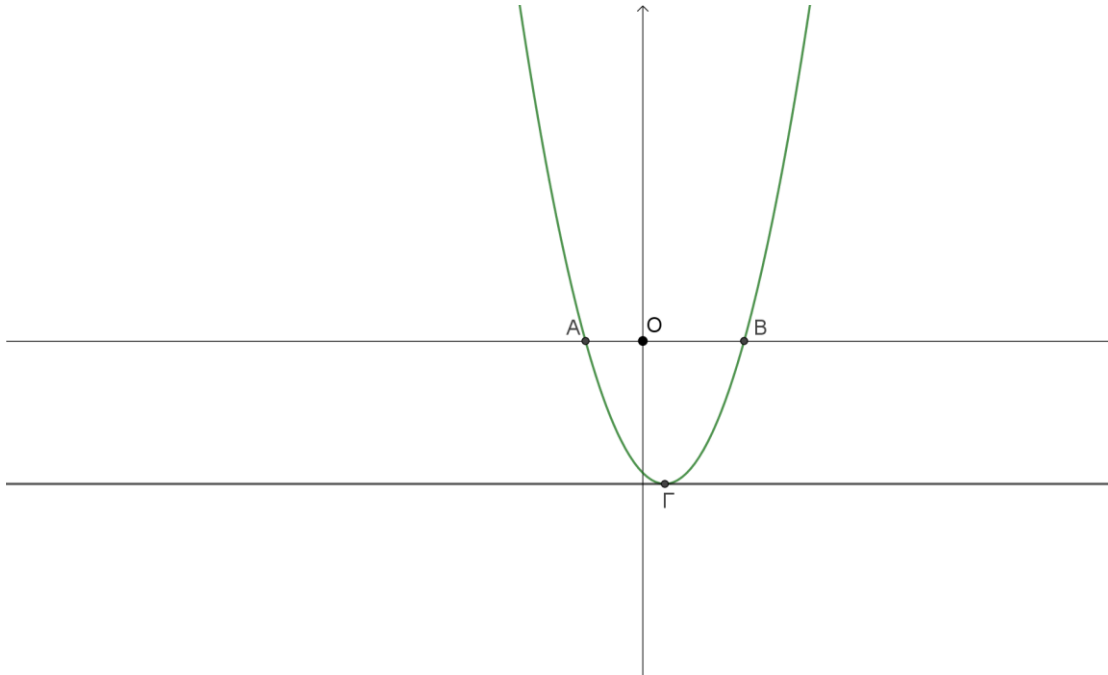
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 3$. Αν $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(\gamma, \delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε :

α) Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2}) < 0$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ . (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 33 12689

Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t) = 150 + 50t, \quad t \in [0, 5].$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση :

$$Y_2(t) = 650 - 25t.$$

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο; (Μονάδες 6)

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5° μέχρι το 10° λεπτό της κίνησής του; (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτήρου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα. (Μονάδες 6)

δ)

i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

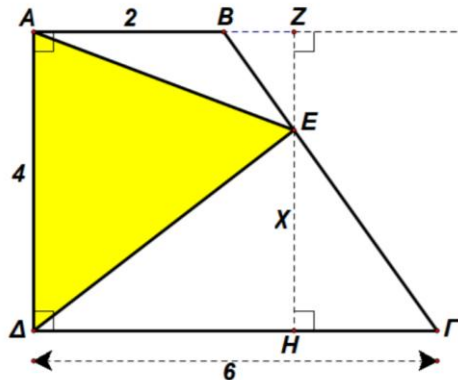
ΘΕΜΑ 34 12834

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε ΑΒ=2, ΑΔ=4, ΓΔ=6, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης; (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) \dots + f\left(\frac{64}{16}\right)$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 35 12728

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, Ε ένα σημείο του $x'x$ άξονα και Ο είναι η αρχή των αξόνων.



Η εξίσωση της ευθείας ΔΕ είναι: $y + \frac{1}{2}x = 4$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Δ. (Μονάδες 6)

Ένα σημείο Γ(t, y_Γ) κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και Β ένα σημείο του $x'x$ άξονα, τέτοιο ώστε ΒΓ να είναι παράλληλη στον $y'y$ άξονα.

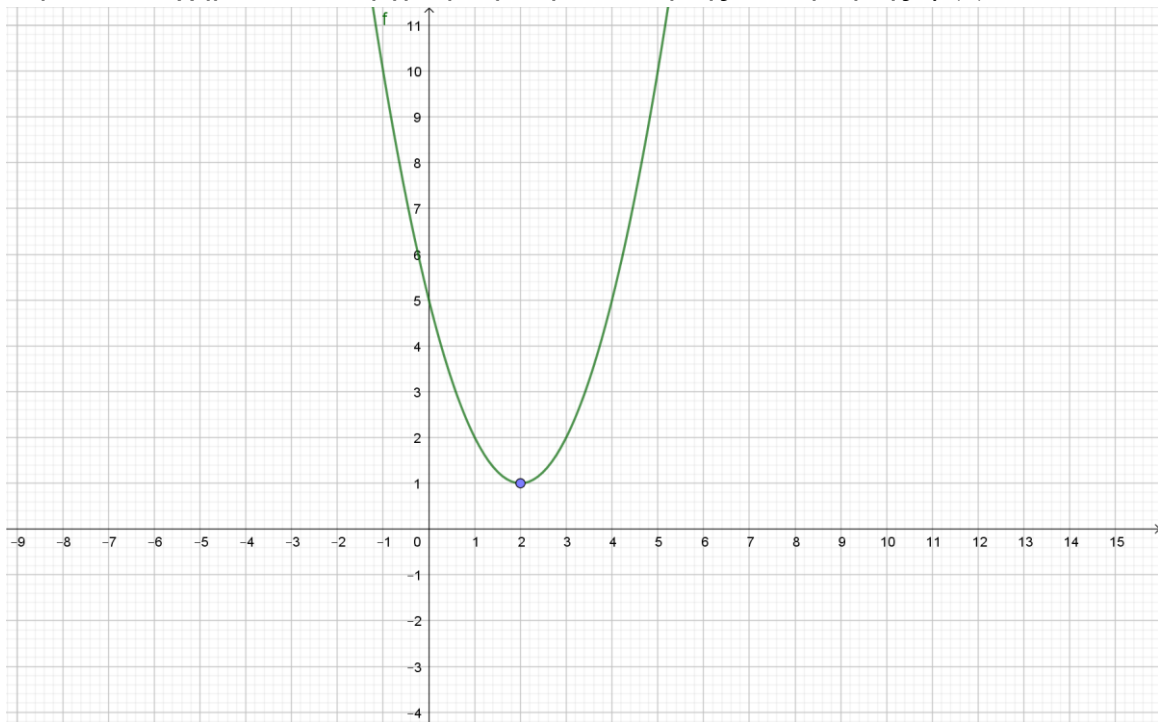
β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t) = 4t - \frac{1}{4}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπέζιου ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 7)

δ) Αν το εμβαδόν του τραπέζιου ισούται με 9,75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 36 13091

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 5$.



α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

β)

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β)i.

(Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι μια ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 37 33894

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x-3, & x > 2 \\ -x+3, & x < 2 \end{cases}$.

(Μονάδες 7)

γ)

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 4)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 38 33895

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 5)
 β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$. (Μονάδες 7)
 δ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 39 34183

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία ταξί με το όνομα «RED» χρεώνει τον πελάτη 1 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Μια άλλη εταιρεία ταξί με το όνομα «YELLOW» χρεώνει τον πελάτη 2 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

- α)
 i. Αν $f(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «RED» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

$x \text{ (km)}$	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

(Μονάδες 3)

- ii. Αν $g(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «YELLOW» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

$x \text{ (km)}$			
$g(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

(Μονάδες 3)

- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)
 γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f , g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας «RED» είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
 δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία «RED» και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα περισσότερα από τον Β, να βρείτε πόσα περισσότερα χρήματα θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β. (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 40 36655

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 7)
 γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 41 36652

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- α) βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 6)
- β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.
(Μονάδες 4)
- γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.
(Μονάδες 8)
- δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα σημείο του ημιάξονα Ox .
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 42 36659

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

- α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;
(Μονάδες 5)
- β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.
- Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.
(Μονάδες 7)
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β (i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.
(Μονάδες 4)
- γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 43 36682

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.
(Μονάδες 10)
- γ) Έστω $M(x,y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 44 36683

Δίνεται η συνάρτηση f , με

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{αν } x < 0 \\ x+2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

β)

i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

(Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ)

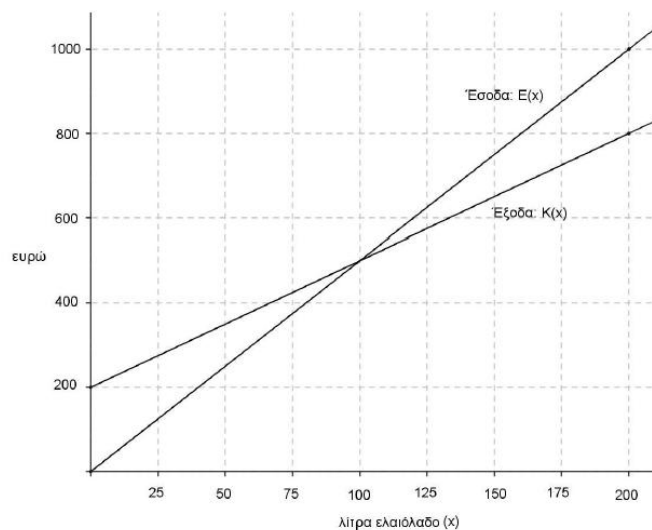
i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γι), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 45 37203



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

(Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

(Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)

(Μονάδες 8)