

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

Για να λύσω μια ανίσωση της μορφής : $\alpha x + \beta > 0$ ή $\alpha x + \beta < 0$

1^{ος} τρόπος : Λειτουργώ όπως και στις εξισώσεις πρώτου βαθμού, δηλαδή χωρίζω γνωστούς από αγνώστους, και στη συνέχεια διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου. Αν σε κάποιο στάδιο πολλαπλασιάσω ή διαιρέσω και τα 2 μέλη με αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

2^{ος} τρόπος : Αν θέλω να λύσω την ανίσωση με τη βοήθεια του πίνακα πρόσημου τότε λύνω την αντίστοιχη εξίσωση και στη συνέχεια βάζω τη ρίζα στο πινακάκι. Για τα πρόσημα ισχύει ότι δεξιά από το 0 είναι ομόσημο του α ενώ αριστερά ετερόσημο του α. Δηλ.

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$\alpha x + \beta$	ετερόσημο α	0	ομόσημο α

π.χ.1 Ναλυθεί και με τους 2 τρόπους η ανίσωση : $-3x + 18 \geq 0$

Λύση: 1^{ος} $-3x + 18 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -18 \Leftrightarrow x \leq 6$ ή $x \in (-\infty, 6]$

Λύση: 2^{ος} Έχω $-3x + 18 = 0 \Leftrightarrow -3x = -18 \Leftrightarrow x = 6$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-3x + 18$	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $-3x + 18 \geq 0$ τότε $x \in (-\infty, 6]$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1 : Για να βρούμε τις κοινές δυο (ή περισσότερων) ανισώσεων, τις λύνουμε ξεχωριστά και παριστάνουμε τις λύσεις τους στον ίδιο άξονα αριθμών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 : Για να λύσουμε μια διπλή ανίσωση $A(x) \leq B(x) \leq \Gamma(x)$, λύνουμε ξεχωριστά τις ανισώσεις $A(x) \leq B(x)$ και $B(x) \leq \Gamma(x)$ και βρίσκουμε τις κοινές τους λύσεις.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3 : Ειδική περίπτωση εξίσωσης με απόλυτες τιμές που ανάγεται σε ανίσωση 1^{ου} βαθμού :

$|f(x)| = f(x)$ ή $|f(x)| = -f(x)$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν τα εξής :

$$|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

$$|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

π.χ. 1 Ναλυθεί η εξίσωση : $|2x - 8| = 2x - 8$.

$$|2x - 8| = 2x - 8 \Leftrightarrow 2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \Leftrightarrow x \in [4, +\infty)$$

π.χ. 2 Ναλυθεί η εξίσωση : $|3x - 6| = 6 - 3x$.

$$|3x - 6| = 6 - 3x \Leftrightarrow 3x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2]$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 104 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6}$

ii. $\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x$

iii. $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$

Λύση:

i. $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6} \xLeftrightarrow{\text{ΕΚΠ}=12} 12 \frac{x-1}{2} + 12 \frac{2x+3}{4} < 12 \frac{x}{6} \Leftrightarrow 6(x-1) + 3(2x+3) < 2x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 6x - 6 + 6x + 9 < 2x \Leftrightarrow 12x - 2x < -3 \Leftrightarrow 10x < -3 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{10} \text{ ή } x \in \left(-\infty, -\frac{3}{10}\right)$

ii. $\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x \xLeftrightarrow{\text{ΕΚΠ}=4} 4 \frac{x-12}{2} + 4 \frac{x}{2} + 4 \frac{3}{4} > 4x \Leftrightarrow 2(x-12) + 2x + 3 > 4x \Leftrightarrow$
 $2x - 24 + 2x + 3 > 4x \Leftrightarrow 0x > 21 \text{ αδύνατη}$

iii. $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5} \xLeftrightarrow{\text{ΕΚΠ}=10} 10 \frac{x-2}{2} + 10 \frac{1-2x}{5} < 10 \frac{x}{10} - 10 \frac{2}{5} \Leftrightarrow$
 $5(x-2) + 2(1-2x) < x - 4 \Leftrightarrow 5x - 10 + 2 - 4x < x - 4 \Leftrightarrow 0x < 4 \text{ που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}.$

2. (Άσκηση 2 σελ. 104 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις :

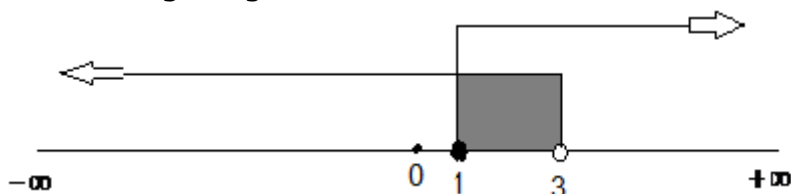
$$3x - 1 < x + 5 \quad \text{και} \quad 2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$$

Λύση:

Έχω : $3x - 1 < x + 5 \Leftrightarrow 3x - x < 5 + 1 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3 \quad (1)$

Επίσης : $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 - 2 \frac{x}{2} \leq 2x + 2 \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$4 - x \leq 2x + 1 \Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} \geq \frac{-3}{-3} \Leftrightarrow x \geq 1 \quad (2)$



Άρα $1 \leq x < 3$ ή $x \in [1, 3)$.

3. (Άσκηση 7 σελ. 104 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $|2x - 6| = 2x - 6$

ii. $|3x - 1| = 1 - 3x$

Λύση:

i. $|2x - 6| = 2x - 6 \Leftrightarrow 2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, +\infty)$

ii. $|3x - 1| = 1 - 3x \Leftrightarrow 3x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

4. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $2x - 1 < -x + 3 - 3(x - 2)$

ii. $2 \frac{x+1}{3} - \frac{2x+1}{2} \leq 2x + \frac{6x+1}{6}$

$$\begin{aligned} \text{iii. } & \frac{x+3}{3} - \frac{x+1}{2} < \frac{x+19}{6} \\ \text{iv. } & \frac{x+10}{5} - 2 < \frac{3(x+1) - (x-3)}{10} \\ \text{v. } & \frac{x+3}{5} - \frac{(x-1)^2}{4} < \frac{5x}{4} - \left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 \\ \text{vi. } & \frac{x(x-3)^2}{2} - \frac{x(1-9x)}{3} > \frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

5. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις :

$$\begin{aligned} \text{i. } & \frac{7x-18}{5} > 4\frac{2x-5}{5} - 1 \quad \text{και} \quad x + \frac{3}{2} + \frac{2x}{5} > \frac{27}{5} + \frac{6x-1}{20} \\ \text{ii. } & \frac{x-3}{3} - \frac{x+4}{6} < \frac{x-6}{2} + 2 \quad \text{και} \quad \frac{x+6}{4} - \frac{-x+8}{4} \geq \frac{6x-8}{5} - x + 2 \\ \text{iii. } & -6(x-6) < 7(3x+1) + 2 \quad \text{και} \quad -5\left(\frac{x}{3} - 1\right) \geq 2x + \frac{x-9}{3} - 4 \end{aligned}$$

6. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

$$\begin{aligned} \text{i. } & -6 < -x - 1 < 3 \\ \text{ii. } & -x < -5x - 4 < -5x \\ \text{iii. } & 2 + \frac{8-3x}{4} < 5 - \frac{x}{4} \leq \frac{4+x}{4} + 3 \\ \text{iv. } & x + \frac{5}{2} \leq 2x + \frac{11}{2} < 2 + \frac{3(x+2)}{2} \end{aligned}$$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\begin{aligned} \text{i. } & |4x-8| = 4x-8 \\ \text{ii. } & |x-2| = 2-x \end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια παραμετρική ανίσωση, εργάζομαι ως εξής :

Βήμα 1 : Φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή : $\alpha \cdot x < \beta$ ή $\alpha \cdot x > \beta$

Βήμα 2 : Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για το α , μια $\alpha > 0$, μια $\alpha < 0$ και μια $\alpha = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

8. Να λύσετε την ανίσωση : $\lambda(2x - \lambda) \leq \lambda x - 2\lambda + 2x$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{Έχω : } & \lambda(2x - \lambda) \leq \lambda x - 2\lambda + 2x \Leftrightarrow 2\lambda x - \lambda^2 \leq \lambda x - 2\lambda + 2x \Leftrightarrow \lambda x - 2x \leq \lambda^2 - 2\lambda \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\lambda - 2)x \leq \lambda(\lambda - 2) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ αν } \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2 \text{ τότε : (1): } (\lambda - 2)x \leq \lambda(\lambda - 2) \Leftrightarrow \frac{(\lambda - 2)x}{\lambda - 2} \leq \frac{\lambda(\lambda - 2)}{\lambda - 2} \Leftrightarrow x \leq \lambda$$

- αν $\lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$ ΤΟΤΕ : (1): $(\lambda - 2)x \leq \lambda(\lambda - 2) \Leftrightarrow \frac{(\lambda - 2)x}{\lambda - 2} \geq \frac{\lambda(\lambda - 2)}{\lambda - 2} \Leftrightarrow x \geq \lambda$
- αν $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ΤΟΤΕ : (1): $(2 - 2)x \leq 2(2 - 2) \Leftrightarrow 0x \leq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

9. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ

- $\lambda(x + 5) < \lambda^2 + 2x + 6$
- $\lambda(x - 4) \geq (\lambda - 2)(\lambda + 2) - 4(x - 1)$
- $\frac{(\lambda - 2)x}{3} < 1 - \frac{x - 2}{3}$
- $\frac{\lambda x - \lambda}{3} \geq \frac{x - \lambda}{4} - \frac{x + 4}{6}$

10. Δίνεται η εξίσωση: $-x - \lambda(\lambda - 3x) = \lambda^2 - 2(2x + 1)$

- Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του λ .
- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση που είναι μεγαλύτερη του αριθμού -4.

11. Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 + 2 = 2(\alpha - \beta)$ να λύσετε τις ανισώσεις:

- $\frac{x}{\alpha - \beta} - \frac{3 - x}{4} \leq \frac{6x - \beta}{8}$
- $(\alpha^{2012} - \beta^{2012})x + \frac{\beta^{10} + 3\beta^9 x}{2} > -\frac{x + 2}{\beta - \alpha}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Για τις ανισώσεις με απόλυτη τιμή υπάρχουν οι παρακάτω σημαντικές ιδιότητες :

$$\begin{aligned} 1) \quad |x| < \alpha &\Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha \quad (\alpha > 0) \\ 2) \quad |x| > \alpha &\Leftrightarrow x > \alpha \quad \text{ή} \quad x < -\alpha \\ &(\alpha > 0) \end{aligned}$$

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $|2x - 5| < 6$

Λύση: $|2x - 5| < 6 \Leftrightarrow -6 < 2x - 5 < 6 \Leftrightarrow -1 < 2x < 11 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{11}{2}$ ή αλλιώς $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $|3x + 7| > 2$

Λύση: $|3x + 7| > 2 \Leftrightarrow 3x + 7 > 2 \Leftrightarrow 3x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{3}$ (1)

ή $3x + 7 < -2 \Leftrightarrow 3x < -9 \Leftrightarrow x < -3$ (2)

Αν συναληθευσω της (1) και (2) $x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$

π.χ.3 Να λυθεί η ανίσωση : $|3x + 2| \geq 3|x - 1|$

Λύση: $|3x + 2| \geq 3|x - 1| \Leftrightarrow |3x + 2|^2 \geq 9|x - 1|^2 \Leftrightarrow 9x^2 + 12x + 4 \geq 9x^2 - 18x + 9 \Leftrightarrow$

$30x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{30} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{6}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12. (Άσκηση 5 σελ. 104 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x| < 3$

ii. $|x - 1| \leq 4$

iii. $|2x + 1| < 5$

Λύση :

i. $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$ ή $x \in (-3, 3)$

ii. $|x - 1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5$ ή $x \in [-3, 5]$

iii. $|2x + 1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x + 1 < 5 \Leftrightarrow -6 < 2x < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 2$ ή $x \in (-3, 2)$

13. (Άσκηση 6 σελ. 104 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \text{ή} \\ x \leq -3 \end{cases}$ ή αλλιώς $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

ii. $|x - 1| > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 4 \\ \text{ή} \\ x - 1 < -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ \text{ή} \\ x < -3 \end{cases}$ ή αλλιώς $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

$$\text{iii. } |2x+1| \geq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 5 \\ \text{ή} \\ 2x+1 \leq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 4 \\ \text{ή} \\ 2x \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \text{ή} \\ x \leq -3 \end{cases} \text{ ή αλλιώς } x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ (ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ)

- **ΜΟΡΦΗ :** $|A(x)| > B(x)$ ή $|A(x)| < B(x)$ εδώ θα πρέπει πρώτα να βγάλουμε το απόλυτο διακρίνοντας δυο περιπτώσεις $A(x) \geq 0$ και $A(x) < 0$. Έπειτα συναληθεύουν τις λύσεις με τον αντίστοιχο περιορισμό.
- **ΜΟΡΦΗ :** $|A(x)| > |B(x)|$ ή $|A(x)| < |B(x)|$ εδώ υψώνω και τα δυο μέλη στο τετράγωνο και σύμφωνα με την ιδιότητα $|\alpha|^2 = \alpha^2$, φεύγουν τα απόλυτα και λύνω κανονικά την ανίσωση.
- **ΜΟΡΦΗ :** $\kappa|A(x)| + \lambda|B(x)| > \Gamma(x)$ ή $\kappa|A(x)| + \lambda|B(x)| < \Gamma(x)$ εδώ πρέπει να κάνουμε απαλοιφή των απολύτων, σχηματίζοντας πίνακα προσήμων για τις παραστάσεις $A(x)$ και $B(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

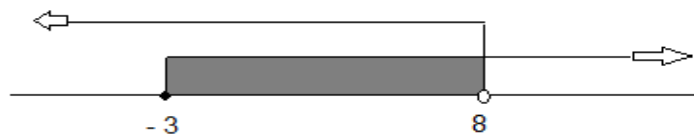
14. Να λύσετε τις ανισώσεις :

- i. $|x+3| > 2x-5$
- ii. $|2x-1| \geq 2|x-2|$
- iii. $-3|x+2| + |x-1| < x-3$

Λύση:

i. $|x+3| > 2x-5 \quad (1)$

- Αν $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ τότε η (1) γίνεται :
 $|x+3| > 2x-5 \Leftrightarrow x+3 > 2x-5 \Leftrightarrow -x > -8 \Leftrightarrow x < 8$



Άρα $x \geq -3$ και $x < 8$ δηλ.

Άρα τελικά $x \in [-3, 8)$

- Αν $x+3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ τότε η (1) γίνεται :
 $|x+3| > 2x-5 \Leftrightarrow -x-3 > 2x-5 \Leftrightarrow -3x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$



Άρα $x \leq -3$ και $x < \frac{2}{3}$ δηλ.

Άρα τελικά $x \in (-\infty, -3)$

ii. $|2x-1| \geq 2|x-2| \Leftrightarrow |2x-1|^2 \geq (2|x-2|)^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 4(x-2)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 4(x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 4x^2 - 16x + 16 \Leftrightarrow 12x \geq 15 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4}$$

iii. $-3|x+2|+|x-1| < x-3$ (1)

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $x \in (-\infty, -2)$ η (1) γίνεται :

$$3(x+2) - (x-1) < x-3 \Leftrightarrow 3x+6-x+1 < x-3 \Leftrightarrow x < -10, \text{ οπότε αν το συναληθεύσουμε με το } x \in (-\infty, -2) \text{ παίρνουμε } x \in (-\infty, -10)$$

- Αν $x \in [-2, 1)$ η (1) γίνεται :

$$-3(x+2) - (x-1) < x-3 \Leftrightarrow -3x-6-x+1 < x-3 \Leftrightarrow -5x < 2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{5}, \text{ οπότε αν το συναληθεύσουμε με το } x \in [-2, 1) \text{ παίρνουμε } x \in \left(-\frac{2}{5}, 1\right)$$

- Αν $x \in [1, +\infty)$ η (1) γίνεται :

$$-3(x+2) + x-1 < x-3 \Leftrightarrow -3x-6+x-1 < x-3 \Leftrightarrow -3x < 4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}, \text{ οπότε αν το συναληθεύσουμε με το } x \in [1, +\infty) \text{ παίρνουμε } x \in [1, +\infty). \text{ Άρα οι λύσεις της ανισώσεως είναι } x \in (-\infty, -10) \text{ ή } x \in \left(-\frac{2}{5}, 1\right) \text{ ή } x \in [1, +\infty) \text{ δηλ. } x \in (-\infty, -10) \text{ ή } x \in \left(-\frac{2}{5}, +\infty\right)$$

$$x \in \left(-\frac{2}{5}, +\infty\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

15. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x-3| < 7$ ii. $|1-x| \leq 3$ iii. $|2x+3| < 1$ iv. $|x-7| > 2$ v. $|x+4| \geq 5$

vi. $|3x-6| > 9$ vii. $|1-2x| \geq 5$ viii. $|x-3| > 2x+1$ ix. $4-|x-2| \geq 3x$ x. $3-\frac{x-3}{2} \leq |x+2|$

16. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x-3| \geq |x+2|$ ii. $|3-2x|-2|x-3| > 0$ iii. $3|x-1|-2|x-3| \geq 5$

iv. $|x+3|-|2-x| > 2x+7$ v. $|x+4| \geq -5$ vi. $|13x-21| \leq -4$

vii. $\frac{|1-2x|-3}{2} \leq 4$ viii. $\frac{7-3|2x+1|}{4} > 1$ ix. $|2x-6| \leq 0$

17. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x-1|+|2x-2| > |5x-5|-6$

ii. $|x-2|+8 < |5x-10|-|4-2x|$

iii. $|2x-1|+2-\frac{|6x-3|}{8} \geq \frac{|4-8x|+3}{5}$

iv. $8-|2x-6| \leq \frac{|3-x|-4}{2}$

18. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i. $1 < |x+5| < 3$ ii. $4 \leq |6-2x| \leq 10$ iii. $4-|x-2| \geq 3x$
 iv. $2x-|x+4| < 8$ v. $|x-3| > |x+2|$ vi. $|x-1| \leq |x+4|$
 vii. $|x-4| - |x+1| > 0$ viii. $|3-2x| - 2|x-3| > 0$

19. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i. $|x| > x$ ii. $|x| \geq x$ iii. $|x| > -x$ iv. $|x| \geq -x$ v. $|x| < x$
 vi. $|x| \leq x$ vii. $|x| < -x$ viii. $|x| \leq -x$

20. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i. $||x|-3| < 2$ ii. $||x-2|-3| \leq 1$ iii. $|7-|2x-1|| \geq 10$ iv. $1 \leq ||x-1|-4| \leq 3$

21. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i. $\sqrt{4x^2-8x+4} + |x-1| < 12$ ii. $\sqrt{9x^2-36x+36} + |2x-4| > 15$

22. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - |2\lambda - 4|x + (\lambda - 2)^2 = 0$ (1)

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα για κάθε πραγματικό αριθμό λ .
 ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η διπλή ρίζα της εξίσωσης είναι: i) ίση με 8, ii) μικρότερη του 2, iii) ανήκει στο διάστημα $[4,6]$.

23. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 8x + |\lambda - 2| = 0$ (1).

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει πραγματικές ρίζες.
 ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $x_1 \cdot x_2 \geq 3$.

24. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - |2\lambda - 4|x + (\lambda - 2)^2 = 0$ (1).

- i. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η διπλή ρίζα να είναι ίση με 8.
 iii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η διπλή ρίζα να είναι μικρότερη του 2.
 iv. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η διπλή ρίζα να ανήκει στο διάστημα $[4,6]$.

25. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + |2\lambda - 1| = 0$ (1).

- i. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει πραγματικές ρίζες.
 ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $x_1^3 + x_2^3 \geq 90$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :

4.1 Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14319

Δίνεται η ανίσωση $|2x - 5| < 3$

α) Να λύσετε την ανίσωση.

(Μονάδες 12)

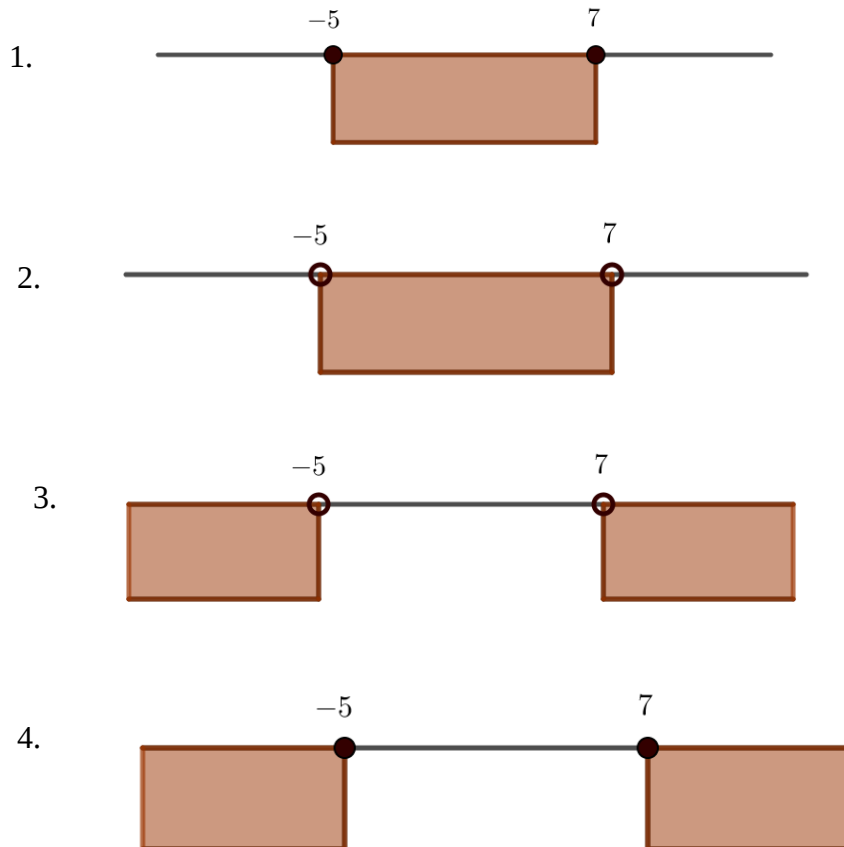
β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5).$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 14295

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x - 1| \geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:



β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

(Μονάδες 12)

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3 13025

α) Να λύσετε την ανίσωση : $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση : $|-x - 1| \leq 23$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 12909

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3| < 5$.

- α) Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3| < 5$. (Μονάδες 7)
- γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 5 37196

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}$.

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)
- β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 6 37195

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)
- β) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 7 37193

Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 8 37191

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|1-2x| < 5$ (Μονάδες 9)

ii. $|1-2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)

- β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 9 37170

Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 \cdot x, \text{ όταν } 0 \leq x \leq 200$$

- α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου, το οποίο βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . (Μονάδες 10)
- γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 10 36777

Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \text{ και } |y - 6| \leq 4.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 11 36888

α) Να λύσετε την ανίσωση $3x - 1 < x + 9$. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 12 36886

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 2$. (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2 - 3x| > 5$. (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 13 35404

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$. (Μονάδες 15)

β) Αν για τους x, y ισχύουν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι $3 < x + y < 7$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 14 36895

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x + 4| = 10$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| > 1$. (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15 36893

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 1| \leq 7$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| > 2$. (Μονάδες 9)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 16 35415

Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| - |x - 2|$.

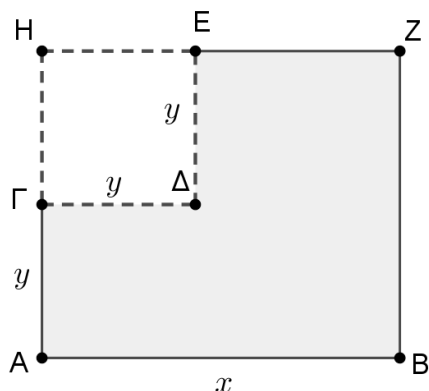
α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$. (Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 17 35549

Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 18 34148

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \leq 5$ (Μονάδες 9)

ii) $|2x - 3| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 19 14650

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$ (1). (Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 1|$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x - 1| \leq 3$. (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x| - 1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 20 34325

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες; (Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 21 13474

Δίνονται οι ανισώσεις :

$$|x-1| \leq \sqrt{3} \quad (1) \quad \text{και} \quad 3 - \frac{x+4}{2} < 0 \quad (2)$$

- α) Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 5)
 β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1). (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2). (Μονάδες 7)
 δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α , β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 22 13312

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)
 β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε :
 i. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$. (Μονάδες 6)
 ii. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$. (Μονάδες 5)
 γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 23 34322

Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που προκύπτει από τη σχέση:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$

- α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός x είναι ο -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ ; (Μονάδες 4)
 β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ο 20, ποιος είναι ο εισαγόμενος αριθμός x ; (Μονάδες 6)
 γ)
 i. Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή:
 $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$. (Μονάδες 2)
 ii. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (Μονάδες 6)
 iii. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο εξαγόμενος αριθμός λ . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 24 33586

Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους, κ.α.).

Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

- α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηναίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης, εάν γεμίζει v τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)
 β) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση v τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση
 i. να μην έχει ζημιά. (Μονάδες 7)
 ii. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. (Μονάδες 8)

4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο της μορφής $ax^2 + bx + \gamma$, ($a \neq 0$) αρχικά βρίσκω τη διακρίνουσα του και έπειτα :

➤ Αν $\Delta > 0$ το τριώνυμο έχει 2 ρίζες x_1, x_2 και παραγοντοποιείται ως εξής :

$$ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$

π.χ.1 Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο : $x^2 - 5x + 6$

Λύση : έχω $x^2 - 5x + 6 = 0$, $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

Άρα : $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

➤ Αν $\Delta = 0$ το τριώνυμο έχει 1 διπλή ρίζα x_1 και παραγοντοποιείται ως εξής :

$$ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)^2$$

π.χ.2 Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο : $x^2 + 6x + 9$

Λύση : έχω $x^2 + 6x + 9 = 0$, $\Delta = 36 - 36 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-6}{2} = -3$

Άρα : $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

➤ Αν $\Delta < 0$ το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 112 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα :

i. $x^2 - 3x + 2$

ii. $2x^2 - 3x - 2$

Λύση :

i. έχω $x^2 - 3x + 2 = 0$, $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

Άρα : $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$

ii. έχω $2x^2 - 3x - 2 = 0$, $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Άρα : $2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα :

i. $2x^2 + 5x - 3$

ii. $-9x^2 + 6x - 1$

iii. $x^2 - 3x + 4$

iv. $x^3 - 3x^2 - 4x$

v. $-x^3 - x^2 + 6x$

vi. $6x^3 + 7x^2 - 3x$

3. Να παραγοντοποιήσετε και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις, αφού πρώτα βρείτε τις τιμές του x για τα οποίες ορίζονται.

- i. $\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$
- ii. $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$
- iii. $\frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 7x + 6}$
- iv. $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$
- v. $\frac{-x^2 + 4x + 5}{x^2 - 3x - 4}$
- vi. $\frac{2x^2 + 5x - 12}{2x^3 - x^2 - 3x}$
- vii. $\frac{-x^3 - 5x^2 + 6x}{3x^3 - 5x^2 + 2x}$
- viii. $\frac{x^3 - 4x}{x^3 - x^2 - 6x}$
- ix. $\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$
- x. $\frac{2x^2 + 5|x| - 3}{x^2 - 2|x| - 15}$
- xi. $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 + 2|x| - 3}$

4. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

- i. $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x} \cdot \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$
- ii. $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 - x} : \frac{x^2 - 5x + 6}{x^4 - 4x^3 + 3x^2}$
- iii. $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + x - 2} : \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6}$
- iv. $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 + 2x + 1} : \left(\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 3} : \frac{1}{x^2 + 2x - 3} \right)$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{x}{x - 3} = \frac{1 - x}{x - 2}$
- ii. $\frac{x + 3}{x - 1} = \frac{x + 4}{x - 2} - \frac{2(x + 1)}{x^2 - 3x + 2}$
- iii. $\frac{4}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x + 2}{x + 3} + \frac{x + 1}{1 - x}$
- iv. $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{x^2 - 4}$

6. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{(x^2 - 3|x| - 4)(x^2 + |x| - 6)}{x^2 + 4|x| + 3}$

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
- ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $A = 3$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

Για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ ή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ ($\alpha \neq 0$) αρκεί να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και τις τιμές του x που γίνεται θετικό ή αρνητικό. Πιο συγκεκριμένα λύνω την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ βρίσκω τις ρίζες x_1, x_2 και τις τοποθετώ στο πινακάκι από το οποίο και βρίσκω το πρόσημο τις συνάρτησης στο διάστημα που θέλω.

1^η περίπτωση: $\Delta > 0$

Τιμές του x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α

2^η περίπτωση: $\Delta = 0$

Τιμές του x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α		ομόσημο του α

3^η περίπτωση: $\Delta < 0$

Τιμές του x	$-\infty$	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α	ομόσημο του α

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $x^2 - 5x + 6 > 0$

Λύση: Έχω : $x^2 - 5x + 6 = 0$ $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$ άρα $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 5x + 6 > 0$ τότε $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

Παρατήρηση 1 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

Παρατήρηση 2 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 5x + 6 < 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x \in (2, 3)$

Παρατήρηση 3 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x \in [2, 3]$

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $x^2 - 6x + 9 > 0$

Λύση: Έχω : $x^2 - 6x + 9 = 0$ $\Delta = 36 - 36 = 0$ άρα $x = 3$ (Διπλή ρίζα)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x^2 - 6x + 9$	+	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 6x + 9 > 0$ τότε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

(Όταν η Διακρίνουσα είναι 0 το τριώνυμο είναι ανάπτυσμα ταυτότητας δηλ. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ οπότε μπορούμε να καταλάβουμε ακόμα καλύτερα γιατί ισχύουν τα πρόσημα στο πίνακάκι)

Παρατήρηση 1 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x \in \mathbb{R}$

Παρατήρηση 2 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 6x + 9 < 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα ότι είναι αδύνατη

Παρατήρηση 3 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x = 3$

π.χ.3 Να λυθεί η ανίσωση : $25 - x^2 \geq 0$

Λύση: Έχω $25 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$

x	$-\infty$	-5		5	$+\infty$
$25 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $25 - x^2 \geq 0$ τότε $x \in [-5, 5]$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

7. (Άσκηση 3 σελ. 112 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Για τις διαφορές τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων :

i. $x^2 - 2x - 15$ ii. $4x^2 - 4x + 1$ iii. $x^2 - 4x + 13$

Λύση :

i. Για το τριώνυμο $x^2 - 2x - 15$ έχω : $x^2 - 2x - 15 = 0$, $\Delta = 4 + 60 = 64$,

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-3		5	$+\infty$
$x^2 - 2x - 15$	+	0	-	0	+

Άρα $x^2 - 2x - 15 > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$ και

$x^2 - 2x - 15 < 0$ για κάθε $x \in (-3, 5)$.

ii. Για το τριώνυμο $4x^2 - 4x + 1$ έχω : $4x^2 - 4x + 1 = 0$, $\Delta = 16 - 16 = 0$, $x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (Διπλή ρίζα)

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x^2 - 4x + 1$	+	0	+

Άρα $4x^2 - 4x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(Άλλωστε θα μπορούσα εξ αρχής να παρατηρήσω ότι : $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$. Γενικά όταν η Διακρινουσα ενός τριωνύμου είναι 0 τότε το τριώνυμο είναι ανάπτυσμα ταυτότητας)

iii. Για το τριώνυμο $x^2 - 4x + 13$ έχω : $x^2 - 4x + 13 = 0$, $\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 - 4x + 13$	+	

Άρα $x^2 - 4x + 13 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x^2 + 2x - 3 > 0$ ii. $x^2 - 3x - 10 \leq 0$ iii. $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$ iv. $4x^2 - 12x + 9 > 0$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x^2 - 5x \geq 0$ ii. $-x^2 + 4x > 0$ iii. $x^2 - 16 \leq 0$ iv. $49 < x^2$

10. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $(x+3)^2 > 4(2x+3)$ ii. $4(x-5) - (x-4)(x+4) \geq 0$ iii. $2x(x-2) - (x-1)^2 < -4$
iv. $x^2 + 1 - \frac{(x+2)^2}{5} > 0$

11. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων :

i. $x^2 - 2x - 3 < 0$ και $-x^2 + x + 2 \geq 0$
ii. $x^2 + x - 2 \geq 0$ και $x^2 + 2x - 8 < 0$
iii. $x^2 + 4x - 5 > 0$ και $x^2 - 4 \leq 0$
iv. $x^2 + x - 6 \leq 0$ και $x^2 - 2x + 1 > 0$
v. $3 \leq x^2 - 2x \leq 8$
vi. $2x^2 - 8x - 6 < (x-3)^2 < 3x^2 - 8x + 5$

12. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

i. $x^2 + 2x - 4 < 3x(x-1)$
ii. $(x-3)(x+3) > 2(2x-7)$
iii. $28 - (x+2)^2 > -2(x-3)(x+3)$

13. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$ ii. $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$ iii. $x^2 - 6|x| + 8 > 0$ iv. $x^2 - 7|x| + 6 > 0$
v. $(2x-3)^2 - 6|2x-3| + 5 \leq 0$ vi. $(x^2 + 2x)^2 - 11|x^2 + 2x| + 24 \geq 0$

14. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x^2 + 3x - 1| < 3$ ii. $|x^2 - 2x - 9| > 6$ iii. $|x-3| \geq 2|x+1|$ iv. $2|x+2| < |x+4|$
v. $|-x^2 + x + 2| \leq 1 - x(x+6)$ vi. $|x^2 + x - 6| \leq x^2 - 3x + 2$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

- Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$) διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta < 0$
- Για το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$) ισχύει :
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta < 0$ και $a > 0$
 - $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta < 0$ και $a < 0$
- Για το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$) ισχύει :
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta \leq 0$ και $a > 0$
 - $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta \leq 0$ και $a < 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15. (Άσκηση 4 σελ. 114 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Δίνεται η εξίσωση : $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση :

i. έχει ρίζες ίσες ii. έχει ρίζες άνισες iii. είναι αδύνατη

Λύση :

i. Στην εξίσωση $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0$ (1) έχω : $\alpha = \lambda, \beta = 3\lambda, \gamma = \lambda + 5$

Αρχικά για να είναι η εξίσωση 2^ο βαθμια πρέπει $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$. Έστω ότι $\lambda = 0$ τότε η (1) γίνεται $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow 0x^2 + 0x + 5 = 0 \Leftrightarrow 5 = 0$ αδύνατη. Άρα πρέπει $\lambda \neq 0$

Για να έχει η εξίσωση (1) ρίζες ίσες θα πρέπει να ισχύει :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (3\lambda)^2 - 4\lambda(\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda = 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 20\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\lambda(\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \\ \text{ή} \\ \lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \end{cases} \text{ . Όμως πρέπει } \lambda \neq 0, \text{ άρα } \lambda = 4.$$

ii. Για να έχει η εξίσωση (1) ρίζες άνισες θα πρέπει να ισχύει :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (3\lambda)^2 - 4\lambda(\lambda + 5) > 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda > 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 20\lambda > 0$$

$$\text{Έχω : } 5\lambda^2 - 20\lambda = 0 \Leftrightarrow 5\lambda(\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \\ \text{ή} \\ \lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \end{cases}$$

λ	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$5\lambda^2 - 20\lambda$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $5\lambda^2 - 20\lambda > 0$ τότε $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, που ικανοποιεί και τον περιορισμό $\lambda \neq 0$.

iii. Για να είναι η εξίσωση (1) αδύνατη πρέπει :

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (3\lambda)^2 - 4\lambda(\lambda + 5) < 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda < 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 20\lambda < 0, \text{ άρα όπως προκύπτει από το παραπάνω πίνακάκι } \lambda \in (0,4)$$

16. (Άσκηση 5 σελ. 114 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση :

Για να αληθεύει η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει : $\Delta < 0$ και $\alpha > 0$.

Εδώ : $\alpha = 1 > 0$, $\beta = 3\lambda$ και $\gamma = \lambda$. Άρα αρκεί $\Delta < 0$.

$$\text{Έχω : } \Delta < 0 \Leftrightarrow (3\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda < 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda < 0$$

$$\text{Έχω : } 9\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(9\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ή} \\ 9\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{9} \end{cases}$$

λ	$-\infty$	0		$\frac{4}{9}$	$+\infty$
$9\lambda^2 - 4\lambda$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $9\lambda^2 - 4\lambda < 0$ τότε $\lambda \in \left(0, \frac{4}{9}\right)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

17. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $\lambda x^2 - 4x + \lambda - 3$, με $\lambda \neq 0$, διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

18. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 + (2\lambda - 1)x + (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

19. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $(\lambda - 3)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 2\lambda - 5 = 0$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

20. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $(\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda - 2 = 0$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

21. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση : $(\lambda - 1)x^2 + 4x + \lambda + 2 > 0$ με $\lambda \neq 1$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

22. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση : $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda < 0$ με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

23. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση : $4x^2 + 4(2\lambda - 1)x + 4 - 3\lambda \geq 0$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

24. Δίνεται η εξίσωση : $2x^2 + 4x + (3\lambda^2 - \lambda) = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.
 - Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$, $x_1^2 + x_2^2$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει : $x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 - 3x_2 = 8$.
25. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + 2\lambda^2 - 4\lambda = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει : $x_1 \cdot x_2 > 2x_1 + 2x_2 - 6$.
26. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + (\lambda + 3)x + \lambda + 6 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει : $x_1^2 + x_2^2 < 42$.
27. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει : $x_1^2 + x_2^2 < -2(2x_1 \cdot x_2 + 1)$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα : 4.2 Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 12722

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$

α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$

(Μονάδες 12)

β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2 \cdot f(x) < 0$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 12976

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1 - 2x) \leq -1$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3 13321

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1)

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$. (2)

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 14189

α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι : $-1 < x < 4$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x + 2| + |x - 5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5 14474

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 6 38203

- α) Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 25 = 0$. (Μονάδες 7)
 β) Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 - 36 \leq 0$. (Μονάδες 9)
 γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 7 37182

- α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$. (Μονάδες 8)
 β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 12)
 γ) Να τοποθετήσετε τον αριθμό $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι ο αριθμός $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 8 37169

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι :
 $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$. (Μονάδες 12)
 β) Να παραγοντοποιήσετε το αρχικό τριώνυμο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 9 37168

Δίνονται οι ανισώσεις : $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1), $x^2 - 16 \leq 0$ (2).

- α) Να βρεθούν οι λύσεις των (1), (2). (Μονάδες 12)
 β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 10 36892

- α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x|}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3}$. (Μονάδες 9)
 β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$. (Μονάδες 9)
 γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 11 36887

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

- α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 7)
 β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$. (Μονάδες 9)
 γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 12 35035

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)
 β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του α) ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 13 35030

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x . (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 14 34919

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$. (Μονάδες 13)

β) Αν $3 < x < 7$, να δείξετε ότι η παράσταση

$$A = |x^2 - 10x + 21| + x^2 - 10x + 22$$

είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 15 34162

α) Να λύσετε την ανίσωση $|2x - 5| \leq 3$. (1) (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2x^2 - x - 1 \geq 0$. (2) (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 16 14577

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1). (Μονάδες 8)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0, x \neq -1$. (Μονάδες 9)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 17 13176

Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| < 2$ και $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με

$\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1]$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση; (Μονάδες 4)

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1 \in (-1, 1]$

και $\rho_2 \in [2, 3)$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση; (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 18 13174

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1}$ και $B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B; (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $A = 3 - |x|$ και $B = |x| - 2$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B - A < 2d(x, 4) - 5$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 19 14615

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ , πραγματικές και άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση. (Μονάδες 7)

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ , η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$ (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 20 14652

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 21 14653

Δίνεται η ανίσωση $|x-1| \leq 3$. (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1). (Μονάδες 8)

δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 22 36678

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους αριθμούς:

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α). (Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 23 36670

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 24 36669

Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

- α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)
 β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$. (Μονάδες 5)
 γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

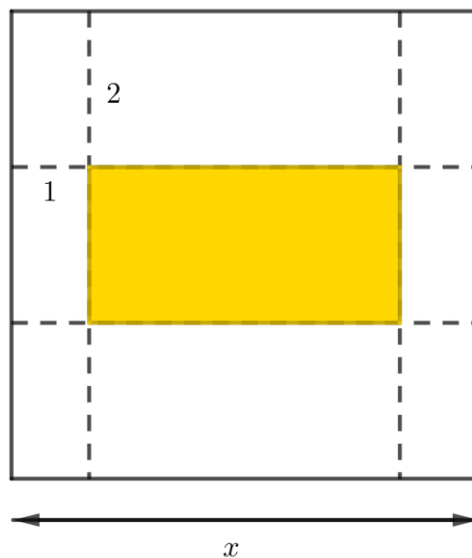
ΘΕΜΑ 25 36658

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε cm) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$.

- α) Μετά πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος; (Μονάδες 8)
 β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος $y = 175m$; (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 26 35724

Για μια επαγγελματική κάρτα επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων (με κίτρινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα) περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά.



- α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = (x-2)(x-4)$, $5 \leq x \leq 10$. (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 . (Μονάδες 7)
 γ) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 27 14123

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - \alpha x - (\alpha + 1)$, $x \in \mathbb{R}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου. (Μονάδες 7)

β) Αν είναι $\alpha > -2$, τότε:

(i) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $\alpha + 1$. (Μονάδες 4)

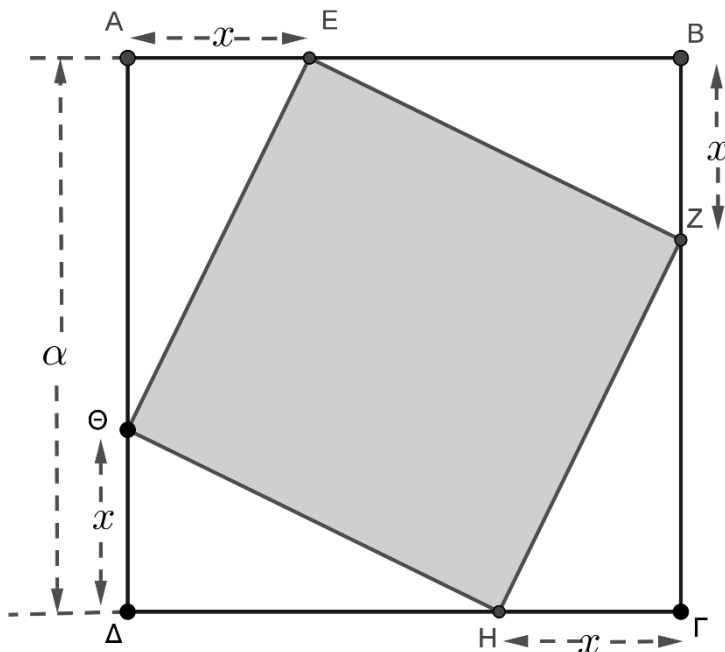
(ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης: $x^2 - \alpha x - (\alpha + 1) \leq 0$ είναι ίσο με 2024. (Μονάδες 7)

(iii) Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 28 13368

Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου $EZH\theta$ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



α) Αν η πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι α και η απόσταση των κορυφών του $EZH\theta$ από τις αντίστοιχες κορυφές του $AB\Gamma\Delta$ είναι x , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\theta$ δίνεται από τη σχέση:

$$(EZH\theta) = x^2 + (\alpha - x)^2 \text{ με } 0 \leq x \leq \alpha.$$

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\theta$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 11)

γ) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ αν για $x = 1$, το εμβαδόν του $EZH\theta$ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$, δηλαδή: $(EZH\theta) = \frac{2}{3}(AB\Gamma\Delta)$. (Μονάδες 8)

(Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1,73$)

ΘΕΜΑ 29 34323

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$, (Μονάδες 4)

ii. να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου και να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1).$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 30 34319

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ , το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 31 34185

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 5x - 6 < 0$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 32 34186

Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0$, με $\lambda \in (0, 2)$.

α) Να βρείτε

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

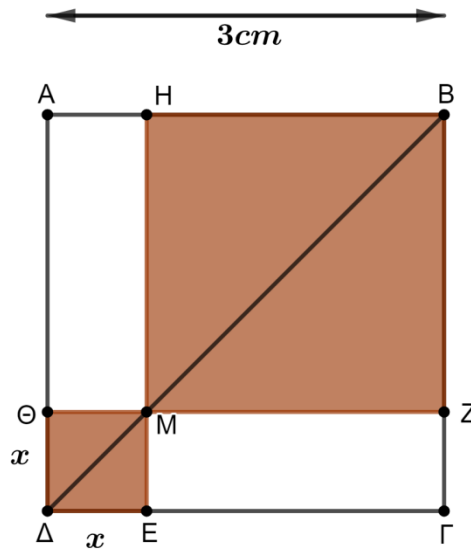
ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ . (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in (0, 2)$ για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 33 34182

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $AB = 3\text{cm}$ και τυχαίο σημείο M που κινείται στη διαγώνιο $B\Delta$ εσωτερικά (δηλαδή το M δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).



α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν E των σκιασμένων τετραγώνων $HBZM$ και $\Theta ME\Delta$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$. (Μονάδες 9)

β) Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι $E(x) = 2x^2 - 6x + 9$, να αποδείξετε ότι $E(x) \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0, 3)$. (Μονάδες 7)

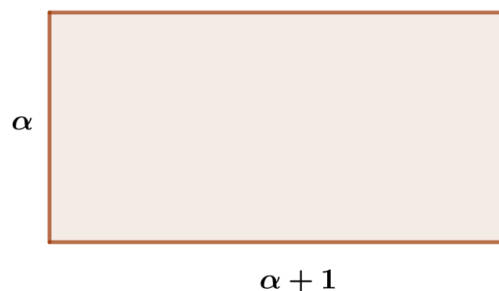
γ) Για ποια θέση του M πάνω στη $B\Delta$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 34 33892

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 6 < 0$. (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$. (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο με πλευρές α και $\alpha + 1$.



Ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1$. Αν για τον εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\frac{3}{2} < \alpha < 2$. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 35 33890

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$ (1). (Μονάδες 10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.

i. Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των αριθμών κ, λ . (Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 36 33712

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 4)

β)

i. Αν $\beta \neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii. Πως αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$; (Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 37 33711

Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 - 2x - 8.$$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x . (Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, η τιμή της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, ποιο είναι το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 38 33698

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$ τότε:

i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

(Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 39 33587

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2,999) \cdot f(-1,002).$$

(Μονάδες 7)

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 40 33582

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40\text{cm}$. Αν $x\text{cm}$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α) $0 < x < 20$. (Μονάδες 4)

β) Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x) = 20x - x^2$. (Μονάδες 8)

γ) Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$. (Μονάδες 6)

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 41 32682

α)

i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$. (Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$. (Μονάδες 7)

β)

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του αριθμού x . (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:
 $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 42 14963

Δίνεται η εξίσωση $|x - 4| - |x - 2| = 2$.

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty, 2]$ και μόνο αυτοί. (Μονάδες 8)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x - 4| - |x - 2| = 2$, τότε να δείξετε ότι $x^2 - 6x + 8 \geq 0$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 43 14924

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi + 9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi + 9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου $\pi = 3,1415\dots$. (Μονάδες 9)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha| + 3)^2 - (|\alpha| + 3) - 12 < 0$, να δείξετε ότι $\alpha \in (-1, 1)$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 44 14654

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0.$$

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι. (Μονάδες 10)

ii. Να δείξετε ότι $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$. (Μονάδες 5)

4.3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ :

$$A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0 \quad \text{Ή} \quad A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) < 0$$

Για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ ή $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) < 0$

Βήμα 1 : βρίσκουμε τις ρίζες (αν υπάρχουν) των παραγόντων $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$

Βήμα 2 : διατάσσουμε τις ρίζες σε έναν άξονα (από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη)

Βήμα 3 : κάτω από τον άξονα σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα των παραγόντων, στα διαστήματα που χωρίζεται ο άξονας από τις ρίζες.

Βήμα 4 : στην τελευταία γραμμή του πίνακα βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου εφαρμόζοντας τους κανόνες προσήμου :

- $(+) \cdot (+) = (+)$ $(-) \cdot (-) = (+)$
- $(+) \cdot (-) = (-)$ $(-) \cdot (+) = (-)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 117 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου : $P(x) = (2 - 3x)(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1)$

Λύση :

Έχω :

- $2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$
- $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1$
- $x^2 - x + 1 = 0$, αδύνατη

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	-1		$\frac{2}{3}$		2	$+\infty$
$2 - 3x$	+		+	0	-		-
$x^2 - x - 2$	+	0	-		-	0	+
$x^2 - x + 1$	+		+		+		+
$P(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Άρα $P(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, 2\right)$ και $P(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(-1, \frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

i. $(x-2)(x^2+2x-3) > 0$

ii. $(x-3)(x^2-4x+3) \leq 0$

iii. $(x^2+3x-4)(x^2-3x+2) < 0$

iv. $(x^2-4)(-x^2+3x+10) \geq 0$

v. $(1-x)(x^2-3x+2)(x^2+x+2) > 0$

vi. $(x^2-7x+12)(-x^2+5x-6) \leq 0$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $(x-2)^4(x+1)^6(x^2-4) \geq 0$

ii. $(x-1)^5(x-2)^4(x-3)^3 \leq 0$

iii. $x^3+4x^2-12x \geq 0$

iv. $4x^2+5x > x^3$

v. $x^4-16 \leq 0$

vi. $x^5-5x^3+4x < 0$

4. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$(x-2)(x^2+2x-15) \geq 0 \text{ και } (x^3-1)(5x^2-x+4)(x+3) > 0$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ :

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \text{Ή} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0$$

➤ Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ γράφεται ισοδύναμα $A(x) \cdot B(x) > 0$ ή $A(x) \cdot B(x) < 0$ [όπου $B(x) \neq 0$] και αυτό γιατί το γινόμενο και το πηλίκο δυο αριθμών έχουν το ίδιο πρόσημο.

➤ Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > \Gamma(x)$ γράφεται :

$$\frac{A(x)}{B(x)} - \Gamma(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow [A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)] \cdot B(x) > 0 \text{ και λύνεται όπως η προηγούμενη.}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0$

Λύση: Πρέπει $x^2-5x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 4$

$$\text{Έχω : } \frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-5x+4) \leq 0$$

$$(x^2+3x)(x^2-5x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ ή } x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$\text{ή } x^2-5x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 4$$

x	$-\infty$	-3		0		1		4	$+\infty$
$x^2 + 3x$	+	0	-	0	+		+		+
$x^2 - 5x + 4$	+		+		+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+		-		+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 5x + 4} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 - 5x + 4) \leq 0$ τότε $x \in [-3, 0] \cup (1, 4)$.
(Στο (1,4) είναι ανοιχτό λόγω του περιορισμού)

6. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6} < 0$

Λύση: Πρέπει $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq 3$

$$\text{Έχω : } \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6} < 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^2 - 5x + 6) < 0$$

$$(x^2 + 3)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3, \text{ Αδύνατη}$$

$$\text{ή } x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x^2 + 3$	+		+		+
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6} < 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^2 - 5x + 6) < 0$ τότε $x \in (2, 3)$.

(Όταν μια παράσταση είναι πάντα θετική τότε δεν επηρεάζει το πρόσημο στην τελευταία σειρά στο πινακάκι. Οπότε θα μπορούσε να παραληφθεί εντελώς.)

7. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \geq \frac{8}{x^2 - 1}$

Λύση: Έχω : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x-1)(x+1)} \geq 0$ ΕΚΠ = $(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ & $x \neq -1$. (Σε αυτό το σημείο όμως δεν κάνω απαλοιφή παρανομαστών όπως στις αντίστοιχες κλασματικές εξισώσεις, αλλά **ομώνυμα κλάσματα**. Αυτό γιατί η απαλοιφή παρανομαστών δεν επιτρέπεται στις ανισώσεις καθώς η παράσταση με την οποία θα πολλαπλασιάσω κάθε όρο, δεν γνωρίζω αν είναι θετική ή αρνητική)

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1) - 2(x-1) - 8}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2x + 2 - 8}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) \geq 0 \text{ Έχω : } (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -2$$

$$\text{ή } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

x	$-\infty$	-2		-1		1		3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	0	-		-		-	0	+
$x^2 - 1$	+		+	0	-	0	+		+
Γινόμενο – Πηλίκο	+	0	-		+		-	0	+

Αρα επειδή θέλω $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) \geq 0$ τότε

$x \in (-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [3, +\infty)$. (Στο $(-1, 1)$ είναι ανοιχτό λόγω του περιορισμού)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $\frac{x-3}{x^2+4x-5} < 0$ ii. $\frac{25-x^2}{x+2} > 0$ iii. $\frac{x^2-2x-3}{x-2} \geq 0$ iv. $\frac{-x^2+3x+4}{x^2-1} \leq 0$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $\frac{3x-1}{x+2} \geq 2$ ii. $\frac{2(x-3)}{7-x} \geq -1$ iii. $\frac{2x^2-4x+5}{x^2+2} \geq 1$ iv. $\frac{x+1}{x-1} - 2 < \frac{1-x}{x}$
v. $\frac{2-x}{x^3+x^2} \leq \frac{1-2x}{x^3-2x^2}$ vi. $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \leq \frac{1-2x}{x^3+1}$

10. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $(|x|-2)(x^2-2x-3) \geq 0$ ii. $(|x|-4)(x^2+2x-8) \leq 0$
iii. $\left| \frac{x^2-5x}{x^2-4} \right| = \frac{x^2-5x}{x^2-4}$ iv. $\left| \frac{3x-x^2}{x-2} \right| = \frac{x^2-3x}{x-2}$

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $2\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x-2}{x-1} + 2 \leq 0$ ii. $\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)^2 + \frac{2x-1}{x-2} - 2 \leq 0$

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $(\lambda-2)x^2 - 3x + (\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες.

13. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda-1)x + \lambda - 3 = 0$

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
ii. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύουν:

α) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 2$ β) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 7$