

3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

Κάθε εξίσωση που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή : $\alpha x + \beta = 0$ ή $\alpha x = -\beta$ (1) λέγεται εξίσωση 1^{ου} βαθμού (ή πρωτοβάθμια εξίσωση), με άγνωστο το x , ενώ κάθε αριθμός που την επαληθεύει λέγεται ρίζα ή λύση της εξίσωσης. Οι αριθμοί α, β λέγονται συντελεστές της εξίσωσης.

➤ Αν $\alpha \neq 0$, η (1) έχει μόνο μια λύση (ρίζα), την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$,

$$\text{καθώς : } (1) \Leftrightarrow \alpha x = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

➤ Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$, η (1) είναι αδύνατη (δεν έχει λύση) καθώς : $(1) \Leftrightarrow 0x = -\beta$ και $\beta \neq 0$.

➤ Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$, η (1) είναι ταυτότητα ή αόριστη (αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x) καθώς : $(1) \Leftrightarrow 0x = 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 83 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42$

ii. $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}$

Λύση :

i. $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42 \Leftrightarrow 4x - 6x + 3 = 7x - 42 \Leftrightarrow 4x - 6x - 7x = -42 - 3 \Leftrightarrow -9x = -45 \Leftrightarrow$
 $-\frac{9x}{9} = -\frac{45}{9} \Leftrightarrow x = 5$

ii. Πρώτα από όλα θέλω να απαλλαγώ από τα κλάσματα. Βρίσκω ΕΚΠ(4,5,20) = 20 και στη συνέχεια πολ/ζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να κάνω απαλοιφή

παρανομαστών. $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{ΕΚΠ(4,5,20)=20}}$

$$20 \frac{1-4x}{5} - 20 \frac{x+1}{4} = 20 \frac{x-4}{20} + 20 \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

$$4(1-4x) - 5(x+1) = x-4+25 \Leftrightarrow 4-16x-5x-5 = x+21 \Leftrightarrow -16x-5x-x = 21-4+5 \Leftrightarrow$$

$$-22x = 22 \Leftrightarrow -\frac{22x}{-22} = \frac{22}{-22} \Leftrightarrow x = -1$$

2. (Άσκηση 2 σελ. 83 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4$

ii. $2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3}$

Λύση :

i. $2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4 \Leftrightarrow 6x - 2 - 6x + 3 = 4 \Leftrightarrow 6x - 6x = 4 - 3 + 2 \Leftrightarrow 0x = 3$ Η εξίσωση είναι αδύνατη (δηλ. δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του x , καμία λύση)

ii. $2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3} \Leftrightarrow 6x - 3 \frac{5-x}{3} = -3 \frac{5}{3} + 3 \frac{7x}{3} \Leftrightarrow 6x - (5-x) = -5+7x \Leftrightarrow$

$$6x - 5 + x = -5 + 7x \Leftrightarrow 7x - 7x = -5 + 5 \Leftrightarrow 0x = 0$$
 Η εξίσωση είναι ταυτότητα (δηλ. αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , άπειρες λύσεις)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\begin{array}{lll} \text{i. } \frac{x-2}{3} = \frac{x+1}{2} - \frac{3x-1}{6} & \text{ii. } (x+1)^2 = (x-3)(x+3) & \text{iii. } 5(-x+2) - 4 = 6 - 5x \\ \text{iv. } \frac{2(x-1)}{3} - \frac{x+1}{2} = \frac{x-5}{6} & \text{v. } (x-2)^3 - x(x-3)^2 = 1 & \text{vi. } \frac{\frac{2x-3}{4} - \frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{x-2 - \frac{2}{3}}{3 + \frac{1}{3}} \end{array}$$

4. Δίνονται οι εξισώσεις: $3 - \frac{x-4}{2} = \frac{3}{4} - 2(x-1)$ (1) και $(2\mu-6)x-5=1-\mu(-4x-2)$ (2).

Να βρείτε τον αριθμό μ , ώστε οι εξισώσεις (1) και (2) να έχουν κοινή λύση.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Σε μια 1^ο βάρθμια εξίσωση $ax + b = 0$, αν οι συντελεστές a, b είναι παράμετροι, τότε η εξίσωση λέγεται παραμετρική. Στις παραμετρικές εξισώσεις ο άγνωστος συνήθως συμβολίζεται με x ενώ η παράμετρος με λ ή μ ή κάποιο άλλο γράμμα. Έτσι όταν χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους, κάθε όρος που περιέχει το x θεωρείται άγνωστος και μεταφέρεται στο 1^ο μέλος, ενώ κάθε όρος που περιέχει το λ (ή μ κτλ) θεωρείται γνωστός και μεταφέρεται στο 2^ο μέλος. Για να λύσουμε μια παραμετρική 1^ο βάρθμια εξίσωση :

Βήμα 1 : φέρνω την εξίσωση στη μορφή $ax = -b$

Βήμα 2 : βρίσκω τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες ισχύει : $a = 0$

Βήμα 3 : όταν $a \neq 0$ η εξίσωση $ax = -b$ έχει ακριβώς μια λύση τη $x = -\frac{b}{a}$

Βήμα 4 : για τις τιμές της παραμέτρου που ισχύει $a = 0$, αντικαθιστώ στην αρχική εξίσωση και προκύπτει είτε αδύνατη είτε ταυτότητα (αόριστη)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5. Να λύσετε την εξίσωση : $\lambda^2 x - \lambda = x - 1$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση :

Βήμα 1 : $\lambda^2 x - \lambda = x - 1 \Leftrightarrow \lambda^2 x - x = \lambda - 1 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1$

Βήμα 2 : $\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ ή

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \\ \text{ή} \\ \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \end{cases}$$

Βήμα 3 : Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση :

$$(\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda - 1}{\lambda^2 - 1} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda - 1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda + 1}$$

Βήμα 4 :

- Αν $\lambda = 1$ τότε : $(\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \Leftrightarrow (1^2 - 1)x = 1 - 1 \Leftrightarrow 0x = 0$ είναι ταυτότητα
- Αν $\lambda = -1$ τότε : $(\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \Leftrightarrow ((-1)^2 - 1)x = -1 - 1 \Leftrightarrow 0x = -2$ είναι αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6. Να λύσετε την εξίσωση : $\lambda^2 x - \lambda = 4x - 2$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.
7. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , να λυθούν οι εξισώσεις :
- $(\lambda - 2)x = \lambda - 2$
 - $(\lambda - 3)x = \lambda$
 - $\lambda(\lambda - 4)x = \lambda - 4$
 - $\lambda(\lambda + 3)x = \lambda^2 - \lambda$
8. Να λύσετε την εξίσωση : $\lambda^2(x - 4) - 4\lambda = 4(x - \lambda^2)$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.
9. Έστω η εξίσωση : $\lambda(\lambda - 5)x = 6(\lambda - 5)$ (1). Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1)
- Έχει λύση το -2
 - Έχει μοναδική λύση το -2
 - Είναι αδύνατη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Οι εξισώσεις αυτές λύνονται με τη βοήθεια της πρότασης : «Ένα γινόμενο παραγόντων είναι μηδέν, όταν τουλάχιστον ένας από τους παράγοντες είναι μηδέν». Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής :

Βήμα 1 : μεταφέρω όλους τους όρους στο 1^ο μέλος, οπότε στο 2^ο μένει μηδέν

Βήμα 2 : παραγοντοποιώ το 1^ο μέλος, ώστε να σχηματιστεί γινόμενο παραγόντων ίσο με το μηδέν, οπότε εφαρμόζουμε την παραπάνω πρόταση.

ΘΥΜΗΣΟΥ : ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

➤ **ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ**

1. ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ π.χ.1 $2y^2 - 5y = y(2y - 5)$,

π.χ.2 $x(x - 3) - 2(3 - x) = x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(x + 2)$

2. ΚΑΤΑ ΟΜΑΔΕΣ π.χ.3 $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(3x^2 + 5)$

➤ **ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**

1. ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

2. ΔΙΑΦΟΡΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

3. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

π.χ.1 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

i) $16x^2 - 1 = (4x)^2 - 1^2 = (4x - 1)(4x + 1)$

ii) $(3x - 1)^2 - 81 = (3x - 1)^2 - 9^2 = (3x - 1 - 9)(3x - 1 + 9) = (3x - 10)(3x + 8)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

10. (Άσκηση 7 σελ. 84 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0$

ii. $(x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0$

Λύση :

i. $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \Leftrightarrow x=4 \\ \text{ή} \\ x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \end{cases}$$

ii. $(x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x-2)^2 + (x-2)(4+x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)[(x-2) + (4+x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x-2+4+x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \text{ή} \\ 2x+2=0 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1 \end{cases}$$

11. (Άσκηση 10 σελ. 84 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

ii. $x^3 - 2x^2 - (2x-1)(x-2) = 0$

Λύση :

i. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \text{ή} \\ x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \end{cases}$

ii. $x^3 - 2x^2 - (2x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) - (2x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \text{ή} \\ x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

12. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $(x+2)(x-3) = (3x+1)(x+2)$

iii. $(x+7)^2 + x^2 - 49 = 0$

v. $3x(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

vii. $x^3 - 4x^2 - 4(x-1)(x-4) = 0$

ix. $(x+2)^3 - 13(x+1) = 1$

xi. $(x^2+4)^2 - x[(x+3)^2 - (x+6)] = 16$

ii. $x(x^2-25) - x^3 + 5x^2 = 0$

iv. $(x-3)^2 - (3-x)(x+1) = 0$

vi. $(x^2-64)(x-2) = (x^2-4)(x-8)$

viii. $x(x+1)^2 - (x+5)^2 + 16 = 0$

x. $(x-1)^3 - (10x-7) = -3(x-2)(x+2)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Για να λύσω μια κλασματική εξίσωση, δηλ. εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρονομαστή,

Βήμα 1 : παραγοντοποιώ τους παρονομαστές και βρίσκω το ΕΚΠ τους,

Βήμα 2 : παίρνω περιορισμούς,

Βήμα 3 : πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να γίνει απαλοιφή παρονομαστών και λύνω την εξίσωση που προκύπτει,

Βήμα 4 : ελέγχω αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13. (Άσκηση 12 σελ. 84 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i.
$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$$

ii.
$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$$

Λύση :

i.
$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \quad \text{ΕΚΠ} = (x-1)(x+1)$$

Πρέπει : $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq -1$

Έτσι έχω : $(x-1)(x+1) \frac{1}{x-1} + (x-1)(x+1) \frac{1}{x+1} = (x-1)(x+1) \frac{2}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1+x-1=2 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$ απορρίπτεται. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii.
$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x} \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x(x+2)} \quad \text{ΕΚΠ} = x(x+2)$$

Πρέπει : $x(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \& x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

Έτσι έχω : $x(x+2) \frac{3}{x+2} - x(x+2) \frac{2}{x} = x(x+2) \frac{x-4}{x(x+2)} \Leftrightarrow 3x - 2(x+2) = x-4 \Leftrightarrow$

$3x - 2x - 4 = x - 4 \Leftrightarrow 0x = 0$ ταυτότητα δηλ. η εξίσωση επαληθεύεται για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

14. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i.
$$\frac{1-2x}{x^2-4} = \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-2}$$
 ii.
$$3 \frac{x+7}{x^2-9} + \frac{2}{x+3} = \frac{5}{x-3}$$
 iii.
$$\frac{x+2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = \frac{1}{x^2-1}$$

iv.
$$1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1+x-x^2}{x-x^2}$$
 v.
$$1 + \frac{2}{x} - 4 \frac{x+1}{4x+5} = \frac{4x^2+8x+10}{4x^2+5x}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΜΟΡΦΗ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Οι εξισώσεις αυτές έχουν ή μπορούν να πάρουν μια από τις επόμενες μορφές :

➤ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1** $|f(x)| = \alpha$

- για $\alpha > 0$ δίνει $f(x) = \alpha$ ή $f(x) = -\alpha$
- για $\alpha = 0$ δίνει $f(x) = 0$ και
- για $\alpha < 0$ είναι αδύνατη

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $|2x-1| = 3$

Λύση: $|2x-1| = 3 \Leftrightarrow 2x-1 = 3$ ή $2x-1 = -3 \Leftrightarrow 2x = 4$ ή $2x = -2 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$

➤ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2** $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$

π.χ. Να λυθεί η εξίσωση : $|x+3| = 3|x-2|$

Λύση: $|x+3| = 3|x-2| \Leftrightarrow x+3 = 3(x-2) \Leftrightarrow x+3 = 3x-6 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$
 ή $x+3 = -3(x-2) \Leftrightarrow x+3 = -3x+6 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

➤ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3** $|f(x)| = g(x)$

- για $g(x) \geq 0$, έχω : $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$
- για $g(x) < 0$, η εξίσωση $|f(x)| = g(x)$ είναι αδύνατη

π.χ. Να λυθεί η εξίσωση : $|2x-1| = x-2$

Λύση: πρέπει $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Έτσι για $x \geq 2$ έχω :

$$|2x-1| = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = x-2 \Leftrightarrow x = -1, \text{απορ.} \\ \text{ή} \\ 2x-1 = -(x-2) \Leftrightarrow 2x-1 = -x+2 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1, \text{απορ.} \end{cases}$$

➤ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4** $|f(x)| = |g(x)| + h(x)$ Σε αυτή την περίπτωση βρίσκω τις ρίζες των $f(x) = 0$ και $g(x) = 0$, φτιάχνω πινακάκι στο οποίο βάζω τις ρίζες των παραπάνω εξισώσεων και στη συνέχεια διακρίνω περιπτώσεις για τα αντίστοιχα διαστήματα που δημιουργούνται.

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $|x+2| = 2|x-1| + 1$

Λύση: $|x+2| = 2|x-1| + 1$ (1) Έχω : $x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ και $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $x \in (-\infty, -2)$ η (1) γίνεται : $-(x+2) = -2(x-1) + 1 \Leftrightarrow -x-2 = -2x+2+1 \Leftrightarrow x = 5$ αδύνατο γιατί $x \in (-\infty, -2)$
- Αν $x \in [-2, 1)$ η (1) γίνεται : $x+2 = -2(x-1) + 1 \Leftrightarrow x+2 = -2x+2+1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (δεκτή)
- Αν $x \in [1, +\infty)$ η (1) γίνεται : $x+2 = 2(x-1) + 1 \Leftrightarrow x+2 = 2x-2+1 \Leftrightarrow x = 3$ (δεκτή)

➤ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5** $|f(x)| + |g(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ και $g(x) = 0$

π.χ. 1 Να λυθεί η εξίσωση : $|x^2 - 4| + |x^2 - 2x| = 0$.

$|x^2 - 4| + |x^2 - 2x| = 0$ επειδή $|x^2 - 4| \geq 0$ και $|x^2 - 2x| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχω :

$$|x^2 - 4| + |x^2 - 2x| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

$$\text{και } x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Άρα η λύση της αρχικής εξίσωσης είναι η κοινή λύση $x = 2$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15. (Άσκηση 14 σελ. 84 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $|2x - 3| = 5$

ii. $|2x - 4| = |x - 1|$

iii. $|x - 2| = 2x - 1$

Λύση :

$$i. \quad |2x - 3| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 5 \\ \text{ή} \\ 2x - 3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ \text{ή} \\ 2x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \text{ή} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$ii. \quad |2x - 4| = |x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = x - 1 \\ \text{ή} \\ 2x - 4 = -(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ή} \\ 2x - 4 = -x + 1 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$iii. \quad |x - 2| = 2x - 1, \text{ πρέπει } 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}. \text{ Έτσι για } x \geq \frac{1}{2} \text{ έχω :}$$

$$|x - 2| = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2x - 1 \\ \text{ή} \\ x - 2 = -(2x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 1 \\ \text{ή} \\ x - 2 = -2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \text{ απορ.} \\ \text{ή} \\ 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1, \text{ δεκτή} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

16. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $|x - 3| = 2$

ii. $|2x - 5| = 3$

iii. $|3x - 1| = 2|x + 1|$

iv. $2|x - 2| = 3|x - 1|$

v. $\frac{|x| - 4}{5} = \frac{|x| - 3}{2} + \frac{4|x| - 1}{3}$

vi. $\left| \frac{x - 1}{x - 2} \right| = 2$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\frac{1}{2} + \frac{|x| - 1}{3} = \frac{5|x| + 1}{6}$

ii. $|x - 2| = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$

iii. $(x - 4)^2 + |x^2 - 16| = 0$

iv. $|3 - |x - 1|| = 2$

v. $|3x - 2| = 4 - x$

vi. $||x + 1| - 2| = 3$

vii. $\left| 4 - \frac{x}{4} \right| = x - 1$

viii. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 2\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 4$

ix. $||x| + 2| = 2x$

$$\begin{array}{lll} \text{x. } \frac{|2x-1|-3}{|x-2|-1} = 3 & \text{xi. } \frac{|2x-6|+1}{3} - 5 = \frac{|9-3x|+7}{6} & \text{xii. } 5 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3x \\ \text{xiii. } |x+2| + |x-2| = |3x-1| & \text{xiv. } \frac{|x-1|+|3x|}{|x|-x} = 3 & \text{xv. } \frac{|x-1|+1}{2} + \frac{2-|x-1|}{3} = 1 - \frac{3-|x-1|}{2} \end{array}$$

18. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\begin{array}{llll} \text{i. } |x+3| - |2-x| = x+5 & \text{ii. } |x^2-9| + |x^2+3x| = 0 & \text{iii. } x^2 - 2|x| + 1 = 0 & \text{iv. } |x|^3 - 4x^2 = 0 \\ \text{v. } |x-2| - x^2 + 4x - 4 = 0 & \text{vi. } \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x - 1 & \text{vii. } \frac{|x-5|+1}{3} - \frac{16-|4x-20|}{6} = \frac{|15-3x|+8}{12} \end{array}$$

19. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{|x^2-9|}{|x^2+3x|+|3x+9|}$

- Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A και να την απλοποιήσετε.
- Να λύσετε την εξίσωση $A=1$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα : 3.1 Εξισώσεις 1^{ου} Βαθμού

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14649

Δίνεται η παράσταση $K = |x+1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1-x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$ (Μονάδες 12)
- Να λυθεί η εξίσωση $|x-2| = 4$.
 - Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 14224

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2-1}{x^2-x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

- Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται. (Μονάδες 8)
 - Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3 12857

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x - 2\lambda + 2 = 0$.

- Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$. (Μονάδες 7)
 - Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 10)
- Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 12917

Δίνεται η εξίσωση $(|a-1|-3)x = a+2$ (1), με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

- Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $a=0$ και $a=5$. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε για ποιες τιμές του a ισχύει $|a-1|=3$. (Μονάδες 8)
 - Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του a που βρήκατε στο ερώτημα β) i. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 5 36896

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

- α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις. (Μονάδες 9)
- β) i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση. (Μονάδες 8)
- ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 6 34872

Δίνεται η εξίσωση $\kappa x + 3 = 2x$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση για $\kappa = 1$ και για $\kappa = 3$. (Μονάδες 13)
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $\kappa = 2$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 7 34146

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:
- i. Όταν $\alpha = 1$. (Μονάδες 5)
- ii. Όταν $\alpha = -3$. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 8 36673

Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

- α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$. (Μονάδες 10)
- β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$, τότε:
- i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
- ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 9 13170

Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά $\varepsilon\%$ (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι $\varepsilon\%$).

- α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο $x \in \mathbb{E}$ με επιτόκιο $\varepsilon\%$, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2 \in \mathbb{E}$. (Μονάδες 7)
- β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.
- i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης $(1,03^2 - 1,02^2) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1,02^2$ (Μονάδες 10)
- ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα. (Μονάδες 8)

3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^v = \alpha$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ : ΔΙΩΝΥΜΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έχουν τη μορφή $x^v = \alpha$ ($v \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}$). Οι λύσεις της εξίσωσης είναι :

- 1) Αν $\alpha > 0$ και v – περιττός έχει ακριβώς μια λύση $x^v = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{\alpha}$
- 2) Αν $\alpha > 0$ και v – άρτιος έχει ακριβώς δυο λύσεις $x^v = \alpha \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[v]{\alpha}$
- 3) Αν $\alpha < 0$ και v – περιττός έχει ακριβώς μια λύση $x^v = \alpha \Leftrightarrow x = -\sqrt[v]{-\alpha}$
- 4) Αν $\alpha < 0$ και v – άρτιος δεν έχει λύσεις (αδύνατη)

π.χ.1) Να λύσετε την εξίσωση : $x^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x = 3$

π.χ.2) Να λύσετε την εξίσωση : $x^4 - 256 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 256 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{256} \Leftrightarrow x = \pm 4$

π.χ.3) Να λύσετε την εξίσωση : $x^3 + 64 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -64 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x = -4$

π.χ.4) Να λύσετε την εξίσωση : $x^6 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -5$ Αδύνατη.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 87 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^3 - 125 = 0$

Λύση :

i. $x^3 - 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{125} \Leftrightarrow x = 5$

2. (Άσκηση 2 σελ. 87 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

ii. $x^5 + 243 = 0$

Λύση :

ii. $x^5 + 243 = 0 \Leftrightarrow x^5 = -243 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{243} \Leftrightarrow x = -3$

3. (Άσκηση 4 σελ. 87 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

iii. $x^5 + 16x = 0$

Λύση :

iii. $x^5 + 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 + 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -16$ αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^3 - 8 = 0$ ii. $x^4 - 16 = 0$ iii. $2x^7 - x = 0$ iv. $x^3 + 8 = 0$ v. $x^6 + 2 = 0$ vi. $16x^4 - 1 = 0$

vii. $8x^3 - 27 = 0$ viii. $x^5 - 2x = 0$ ix. $(5x + 2)^3 + 64 = 0$ x. $(x - 2)^{10} - 1024 = 0$

xi. $(x^5 - 32)(x^4 - 81) = 0$ xii. $(|x - 2| - 3)^3 = 8$ xiii. $(|3 - x| - 5)^4 = 16$

xiv. $(x - 1)^5 + 81 = 81x$ xv. $(x + 3)^5 - 16x = 48$ xvi. $x^8 - 27 = 27x^5 - x^3$

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (\alpha \neq 0) \quad \text{Διακρίνουσα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

- Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες : $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα : $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 3x + 2 = 0$

Είναι $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$, έχει δυο πραγματικές ρίζες άνισες τις

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

π.χ.2 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 + 10x + 25 = 0$

Είναι $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$, έχει μια πραγματική διπλή ρίζα την

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5$$

π.χ.3 Να λύσετε την εξίσωση : $(x-3)^2 + 4x = -3$

$$(x-3)^2 + 4x = -3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 12 = 0$$

Είναι $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 4 - 48 = -44 < 0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Προσοχή : Όταν $\beta=0$ ή $\gamma=0$, τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μπορεί να λυθεί πιο εύκολα χωρίς τη χρήση της διακρινουσας. Πιο συγκεκριμένα :

- Αν $\beta=0$ τότε $\alpha x^2 + \gamma = 0$

π.χ.1 $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x = \pm 4$

π.χ.2 $x^2 - 169 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 169 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{169} \Leftrightarrow x = \pm 13$

π.χ.3 $x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{12} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3 \cdot 4} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$

π.χ.4 $x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5$ Αδύνατη.

- Αν $\gamma=0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x = 0$

π.χ.1 $x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x-5=0 \Leftrightarrow x = 5$

π.χ.2 $x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x+6=0 \Leftrightarrow x = -6$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Να λύσετε τις εξισώσεις : i. $x^2 - 5x + 6 = 0$ ii. $x^2 - 6x + 9 = 0$ iii. $(x-2)^2 + 3x = 2$
 iv. $x^2 - 9x = 0$ v. $x^2 - 9 = 0$ vi. $2x^2 - 72 = 0$ vii. $\frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}x = 0$ viii. $\frac{(x-9)^2}{3} = 27$
 ix. $2x^2 + 8x - 10 = 0$ x. $9x^2 - 6x + 1 = 0$ xi. $-2x^2 - 5x + 3 = 0$ xii. $-3x^2 + 12 = 0$
2. Να λύσετε τις εξισώσεις : i. $(2x-1)^2 - (3-x)^2 = (x+1)(2x-1)$
 ii. $(x-2)^2 - (x-1)(x+1) = (x+3)^2 - 6x$ iii. $(x+2)^3 - x(x-3)^2 = 15 - (3x+1)(1-3x)$
 iv. $(x-1)^3 - x(x-2)(x+2) = 1$ v. $(3x+2)^2 - (x-2)(3-x) = 6 - 4(x-1)^2$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ VΙΕΤΑ

Σε περίπτωση που η εξίσωση : $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε για το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ ισχύει :

$$\begin{aligned} \text{➤ } S = x_1 + x_2 &\Leftrightarrow S = -\frac{b}{a} \\ \text{➤ } P = x_1 \cdot x_2 &\Leftrightarrow P = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Απόδειξη :

$$\begin{aligned} \text{➤ } x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \text{ και} \\ \text{➤ } x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Οι παραπάνω τύποι είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta. Με τη βοήθεια των τύπων του Vieta η εξίσωση : $ax^2 + bx + c = 0$ μετασχηματίζεται ως εξής :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ μας δίνει τη δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.
 Π.χ. η εξίσωση με άθροισμα ριζών 3 και γινόμενο $\sqrt{2}$ είναι η $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. (Άσκηση 6 σελ. 94 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)
 Να βρείτε την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς :
 i. 2 και 3 ii. 1 και $\frac{1}{2}$ iii. $5 - 2\sqrt{6}$ και $5 + 2\sqrt{6}$

Λύση :

- i. Η εξίσωση θα είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$
 με $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 2 + 3 \Leftrightarrow S = 5$ και $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = 2 \cdot 3 \Leftrightarrow P = 6$,
 άρα $x^2 - 5x + 6 = 0$

- ii. Η εξίσωση θα είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$
 με $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow S = \frac{3}{2}$ και $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = 1 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{1}{2}$,
 άρα $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$
- iii. Η εξίσωση θα είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$
 με $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 5 - 2\sqrt{6} + 5 + 2\sqrt{6} \Leftrightarrow S = 10$ και
 $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = (5 - 2\sqrt{6}) \cdot (5 + 2\sqrt{6}) \Leftrightarrow P = 25 - (2\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow P = 25 - 24 \Leftrightarrow P = 1$,
 άρα $x^2 - 10x + 1 = 0$

4. (Άσκηση 7 σελ. 94 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν

- i. Άθροισμα 2 και γινόμενο -15 ii. Άθροισμα 9 και γινόμενο 10.

Λύση :

- i. Έχω $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 2$ και $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = -15$, άρα οι αριθμοί που ψάχνω θα είναι ρίζες της εξίσωσης : $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$, έχω $\Delta = 4 + 60 = 64$
 και $x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

- ii. Έχω $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 9$ και $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = 10$, άρα οι αριθμοί που ψάχνω θα είναι ρίζες της εξίσωσης : $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 10 = 0$, έχω

$$\Delta = 81 - 40 = 41 \text{ και } x_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{41}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{9 + \sqrt{41}}{2} \\ x_2 = \frac{9 - \sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς :

- i. -5 και 2 ii. 4 και $\frac{1}{4}$ iii. $1 - \sqrt{7}$ και $1 + \sqrt{7}$ iv. $-\sqrt{2} - \sqrt{5}$ και $-\sqrt{2} + \sqrt{5}$

6. Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν

- i. Άθροισμα 2 και γινόμενο -1. ii. Άθροισμα $\frac{5}{6}$ και γινόμενο $\frac{1}{6}$

7. Να προσδιορίσετε τις ρίζες των παρακάτω εξισώσεων, χωρίς να υπολογίσετε τη διακρίνουσα τους.

- i. $x^2 - 5x + 6 = 0$ ii. $x^2 - 8x + 15 = 0$ iii. $x^2 + x - 12 = 0$ iv. $x^2 + x - 2 = 0$

8. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 1 = 0$, να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

- i. $x_1 + x_2$ ii. $x_1 x_2$ iii. $x_1^2 + x_2^2$ iv. $x_1^3 + x_2^3$ v. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ vi. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

9. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 5 = 0$. Να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς:

- i. $x_1 + 2$ και $x_2 + 2$ ii. $2x_1 - 3$ και $2x_2 - 3$ iii. x_1^2 και x_2^2 iv. x_1^3 και x_2^3

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

➤ ΜΟΡΦΗ 1 : $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

Επειδή : $x^2 = |x|^2$ τότε : $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha|x|^2 + \beta|x| + \gamma = 0$ και έπειτα θέτω $|x| = \omega \geq 0$, οπότε η αρχική εξίσωση γίνεται $\alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 + 2|x| - 35 = 0$

Λύση : Έχω $x^2 + 2|x| - 35 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 35 = 0$. Θέτω $|x| = \omega \geq 0$ άρα η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + 2\omega - 35 = 0, \Delta = 4 + 140 = 144$,

$$\omega_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} = \begin{cases} \omega = 5, \text{δεκτή} \\ \text{ή} \\ \omega = -7, \text{απορ.} \end{cases}$$

- Για $\omega = 5 \Leftrightarrow |x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$
- Για $\omega = -7 \Leftrightarrow |x| = -7$ Αδύνατη.

➤ ΜΟΡΦΗ 2 : $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΗ)

Έχουν τη μορφή $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ και λύνονται με αντικατάσταση :

$$x^2 = \omega \geq 0$$

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση : $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

Λύση : Θέτω $x^2 = \omega \geq 0$ άρα η εξίσωση γίνεται $2\omega^2 - 7\omega - 4 = 0$. Είναι

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 49 + 32 = 81 > 0, \omega_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 9}{4} = \begin{cases} \omega = 4, \text{δεκτή} \\ \text{ή} \\ \omega = -\frac{1}{2}, \text{απορ.} \end{cases}$$

- Για $\omega = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$
- Για $\omega = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$ Αδύνατη.

➤ ΜΟΡΦΗ 3 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια κλασματική εξίσωση, δηλ. εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρονομαστή, 1^{ου} παραγοντοποιώ τους παρονομαστές και βρίσκω το ΕΚΠ τους, 2^{ου} παίρνω περιορισμούς, 3^{ου} πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να γίνει απαλοιφή παρονομαστών και λύνω την εξίσωση που προκύπτει, 4^{ου} ελέγχω αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{x^2-1}$

Λύση : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{(x-1)(x+1)}$ ΕΚΠ = $(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq -1$

$$(x-1)(x+1) \frac{x}{x-1} - (x-1)(x+1) \frac{2}{x+1} = (x-1)(x+1) \frac{8}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$x(x+1) - 2(x-1) = 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 2x + 2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad (\text{δεκτή}) \quad \text{ή} \\ x = -2 \quad (\text{δεκτή}).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

- i. $x^2 - 8|x| + 7 = 0$
- ii. $6x^2 + 5|x| - 11 = 0$
- iii. $5x^2 + 3|x| + 1 = 0$
- iv. $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
- v. $x^4 + x^2 - 6 = 0$
- vi. $2x^4 + 10x^2 + 7 = 0$

11. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

- i. $3(x+5)^2 + 2|x+5| - 5 = 0$
- ii. $3(4x-1)^2 + |4x-1| + 5 = 0$
- iii. $2\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 - \left|\frac{5x}{2} - 5\right| + 2 = 0$
- iv. $(x-4)^4 - 7(x-4)^2 + 6 = 0$
- v. $\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{4}{x}\right) + 20 = 0$
- vi. $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 0$
- vii. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 + 35\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 216 = 0$
- viii. $(x^2 - 5x + 1)^2 + 2(x^2 - 5x + 1) - 3 = 0$
- ix. $(x-1)^2 - 6\sqrt{x^2 - 2x + 1} + 8 = 0$
- x. $(x+2)^2 - 2\sqrt{x^2 + 4x + 4} - 15 = 0$
- xi. $(2x-1)^2 - 4\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3 = 0$
- xii. $(|x| - 3)^2 - 3\sqrt{x^2 - 6|x| + 9} - 4 = 0$
- xiii. $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$
- xiv. $x^2 + 2x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 6$
- xv. $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$
- xvi. $x^4 + 8x^3 + 13x^2 - 8x + 1 = 0$

12. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

- i. $\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{x-4}{x^2 + 2x} = 0$
- ii. $\frac{x^2 + 5}{x^2 - x} - \frac{x+5}{x-1} = \frac{1}{x}$
- iii. $\frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x-2}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Σε μια 2^ο βάθμια εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, αν οι συντελεστές a, b, c είναι παράμετροι, τότε η εξίσωση λέγεται παραμετρική. Στις παραμετρικές εξισώσεις ο άγνωστος συνήθως συμβολίζεται με x ενώ η παράμετρος με λ ή μ ή κάποιο άλλο γράμμα.

Αν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:

- έχει δυο ρίζες άνισες, αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta > 0$
- έχει πραγματικές ρίζες (δηλ. τουλάχιστον μια), αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta \geq 0$
- έχει μια διπλή ρίζα, αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta = 0$
- δεν έχει πραγματικές ρίζες (δηλ. είναι αδύνατη), αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta < 0$

Επιπλέον οι τύποι του Vieta μπορούν να συνδυαστούν με τις ρίζες της εξίσωσης, δηλαδή αν θέλουμε η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ να έχει :

- δυο ρίζες άνισες θετικές, τότε πρέπει $\Delta > 0, P > 0$ και $S > 0$
- δυο ρίζες άνισες αρνητικές, τότε πρέπει $\Delta > 0, P > 0$ και $S < 0$
- δυο ρίζες άνισες ετερόσημες, τότε πρέπει $\Delta > 0, P < 0$
- δυο ρίζες αντιστροφές, τότε πρέπει $\Delta \geq 0, P = 1$
- δυο ρίζες αντίθετες, τότε πρέπει $\Delta \geq 0, S = 0$
- μια ρίζα θετική (διπλή), τότε πρέπει $\Delta = 0, S > 0$
- μια ρίζα αρνητική (διπλή), τότε πρέπει $\Delta = 0, S < 0$
- μια ρίζα το μηδέν (διπλή), τότε πρέπει $\Delta = 0, S = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13. (Άσκηση 3 σελ. 93 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες :

i. $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0, \lambda \neq 0$ ii. $ax^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0, \alpha \neq 0$

Λύση :

i. Αρκεί να δείξω ότι $\Delta \geq 0$. Έχω : $\alpha = \lambda, \beta = 2, \gamma = -(\lambda - 2)$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot \lambda \cdot [-(\lambda - 2)] = 4 + 4\lambda(\lambda - 2) = 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 4(\lambda - 1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ (άρα και για κάθε } \lambda \neq 0).$$

ii. Αρκεί να δείξω ότι $\Delta \geq 0$. Έχω : $\alpha = \alpha, \beta = \alpha + \beta, \gamma = \beta$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \text{ ισχύει για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (άρα και για κάθε } \alpha \neq 0).$$

14. (Άσκηση 4 σελ. 93 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $\mu x^2 + 2x + \mu = 0, \mu \neq 0$ έχει διπλή ρίζα.

Λύση :

Για να έχει η εξίσωση μια διπλή ρίζα πρέπει $\Delta = 0$, έχω : $\alpha = \mu, \beta = 2, \gamma = \mu$

$$\text{Οπότε } \Delta = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4 \cdot \mu \cdot \mu = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\mu^2 = 0 \Leftrightarrow 4\mu^2 = 4 \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ ή } \mu = -1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

15. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. $x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda = 0$ ii. $3x^2 + 2\lambda x - \lambda^2 = 0$

16. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda^2 = 0$, έχει μια διπλή ρίζα.

17. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + (\lambda + 2)x + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

i. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει πραγματικές ρίζες.

ii. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες αντίθετες.

iii. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες αντίστροφες.

18. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + (\lambda - 2)x - 2\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

i. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει πραγματικές ρίζες.

ii. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες αντίθετες.

iii. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες αντίστροφες.

19. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (6\lambda - 1)x - 20\lambda + 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει ρίζα τον αριθμό 3.

i. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση έχει και άλλη μια ρίζα, διαφορετική του 3.

20. Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\kappa \neq \lambda$, να δειχθεί ότι η εξίσωση : $(\lambda - \kappa)x^2 - 2(\kappa + \lambda)x + \kappa - \lambda = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες.

21. Δίνεται η εξίσωση $\kappa^2 x^2 - 2\lambda \kappa^2 x + \lambda^2 (\kappa^2 - 1) = 0$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι :

i. η εξίσωση έχει δυο πραγματικές ρίζες άνισες,

ii. οι αριθμοί $\lambda - \frac{\lambda}{\kappa}$ και $\lambda + \frac{\lambda}{\kappa}$ είναι ρίζες της εξίσωσης.

22. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση $x^2 + 4x + \lambda + 2 = 0$ να έχει:

i. μια διπλή ρίζα,

ii. δύο ρίζες ετερόσημες,

iii. δύο ρίζες αρνητικές,

iv. δύο ρίζες θετικές,

v. δύο ρίζες αντίστροφες.

23. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 3x - 7 = 0$ (1).

i. Να υπολογίσετε τις τιμές των $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι οι ρίζες x_1, x_2 είναι ετερόσημες.

ii. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ και $B = (2x_1 + 1)(2x_2 + 1)$.

iii. Να δείξετε ότι : $x_1^2 + x_2^2 = 23$.

iv. Να βρείτε εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού με ρίζες τα τετράγωνα των ριζών της (1).

24. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

- Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), να λύσετε την εξίσωση : $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$.
- Για την μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο υποερώτημα, να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = 2x_1 + 1$, $\rho_2 = 2x_2 + 1$.

25. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το λ , ώστε να ισχύει:

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -\frac{2}{3}.$$

26. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
- Να βρείτε το λ , ώστε η μια ρίζα της εξίσωσης (1) να είναι ίση με το τετράγωνο της άλλης.
- Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για την μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε.
 - Να υπολογίσετε την επόμενη παράσταση : $A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 2}{x_1}$.
 - Να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1 - 1}$ και $\frac{1}{x_2 - 1}$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα : 3.2 – 3.3 Η εξίσωση $x^v = a$ - Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 13028

Δίνεται η εξίσωση $ax^2 - 2ax - 2a - 2 = 0$, με $a \in \mathbb{R}^*$ (1).

- Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3. (Μονάδες 10)
- Για $a=2$ να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 14741

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $K = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha^3 - \alpha^2}$, $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

- Να δείξετε ότι $K = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$. (Μονάδες 13)
- Για κάθε $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$,
 - Να δείξετε ότι $K \neq 0$. (Μονάδες 6)
 - Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει η ισότητα $K(K - 2) = 0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 3 37181

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ . (Μονάδες 13)
- Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 37178

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x + 1$ μέτρα και x μέτρα.

- α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.
(Μονάδες 10)
- β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 5 37171

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \text{ και } \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$$

- α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$.
(Μονάδες 10)
- β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 6 36890

- α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 3$.
(Μονάδες 10)
- β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 7 35038

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \text{ και } \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$$

- α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.
(Μονάδες 10)
- β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 8 34920

Δίνεται το τριώνυμο $3x^2 + 6x - 12$ (1). Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1),

- α) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1 + x_2$ και x_1x_2 .
(Μονάδες 13)
- β) Να βρείτε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $4x_1, 4x_2$.
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 9 34436

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5+\sqrt{5}}, B = \frac{1}{5-\sqrt{5}}$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
- i) $A + B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)
- ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)
- β) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 10 34161

- α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.
(Μονάδες 12)
- β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 11 34154

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$.

α) Να δείξετε ότι: $A+B=3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 12 34150

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι, ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β . (Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α και β . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 13 34149

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1). (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| < 2$ (2). (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις (1) και (2). (Μονάδες 7)

3ο Θέμα

ΘΕΜΑ 14 14749

α)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $A = \frac{x}{x-|x|}$. (Μονάδες 9)

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A , να δείξετε ότι $A = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)

β) Για $x < 0$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x^3}{x-|x|} = \frac{3}{2}x + 2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15 14052

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 1 = 0$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + x = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + |x^2 - 1| + x = 0$. (Μονάδες 10)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 16 14651

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0 \quad \text{όπου } \lambda > 0.$$

α) Να βρείτε:

- i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . (Μονάδες 6)
- ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 17 14490

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω . (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

- i. Το σύνολο A που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)
- ii. Την πραγματική τιμή του λ , αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες. (Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 18 14406

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$. (Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β , έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 19 12912

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 20 13320

Θεωρούμε τις εξισώσεις $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (I) και $\gamma x^2 + bx + \alpha = 0$ (II) όπου α, β, γ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, με $\alpha \neq \gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν το ίδιο πλήθος ριζών. (Μονάδες 8)

β) Αν ο αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της (I) να δείξετε ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (II). (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι καμία από τις εξισώσεις (I), (II) δεν μπορεί να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2}$. (Μονάδες 8)

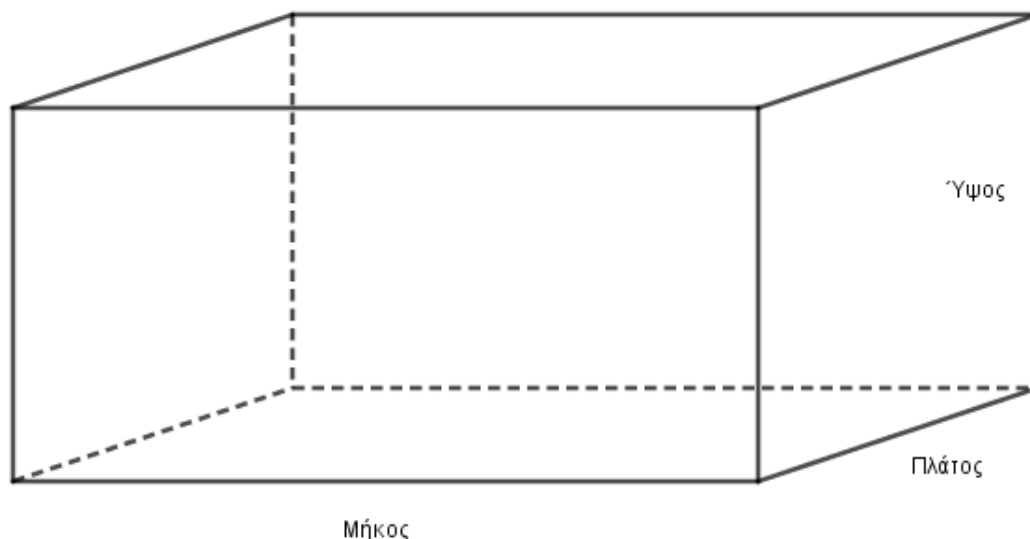
ΘΕΜΑ 21 12683

Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο 16m^3 , να βρείτε τις διαστάσεις της. (Μονάδες 8)

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει 16m^3 . (Μονάδες 9)

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 22 36675

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ . (Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε τον αριθμό λ . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 23 36651

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda = -2$ και όταν $\lambda = 3$.
(Μονάδες 8)
- β) i. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. (Μονάδες 3)
ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.
(Μονάδες 6)
- γ) Αν ισχύει $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.
(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 24 36663

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm

- α) Να βρείτε ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.
(Μονάδες 6)
- β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:
- i. Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)
ii. Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 25 36661

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$.
(Μονάδες 6)
- γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.
(Μονάδες 7)
- δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 26 34544

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$: (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

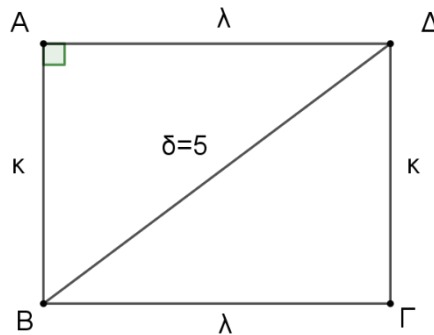
- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta = (2\lambda - 4)^2$. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .
(Μονάδες 9)
- γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 27 34327

- α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1) (Μονάδες 10)
- β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.
- i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 7)
- ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 28 34390

Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi = 14 \text{ cm}$ και μια διαγώνιος $\delta = 5 \text{ cm}$.



α)

i. Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E = 12 \text{ cm}^2$. (Μονάδες 7)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0$. (Μονάδες 7)

iii. Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 14 \text{ cm}$ πρέπει να έχει εμβαδόν $E \leq \frac{49}{4}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 29 34310

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης ως συνάρτηση του λ . (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 30 33889

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1)$$

και

$$8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2) \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4),$$

με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i. $\rho \neq 0$. (Μονάδες 5)

ii. $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4). (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 31 33585

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης, ως συνάρτηση του α . (Μονάδες 10)

Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$,

γ) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε $|\rho_1 - \rho_2| = 2$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 32 33584

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$. (Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i. Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 33 14820

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$. (Μονάδες 4)

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$. (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A . (Μονάδες 5)

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 34 14759

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$. (Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$. (Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γι), να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}.$$

(Μονάδες 5)