2.1 ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

- **Ρητός** ονομάζεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α,β είναι ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Ρητοί αριθμοί : $\mathbb{Q}=\left\{\frac{\kappa}{\lambda} / \kappa,\lambda \in \mathbb{Z}\right\}$, $\lambda \neq 0$.

  Έτσι π.χ. οι αριθμοί $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{12}$ κτλ. είναι ρητοί. Όμως και όλοι οι ακέραιοι μπορούν να γραφούν στη μορφή κλάσματος π.χ. $3=\frac{3}{1}$. Άρα και οι ακέραιοι ανήκουν στους ρητούς.

- **Άρρητοι** λέγονται οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν στη μορφή κλάσματος. Τέτοιοι αριθμοί είναι αυτοί που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία μη επαναλαμβανόμενα όπως οι ρίζες των μη τέλειων τετραγώνων π.χ $\sqrt{2}=1{,}414213562\ldots$ ή όπως το $\pi=3{,}14\ldots$.

  Άρρητοι αριθμοί : $\mathbb{Q}'=\left\{\ldots,-\sqrt{2},\ldots,\pi,\ldots\sqrt{3},\ldots,\sqrt{5},\ldots\right\}$

- **Πραγματικοί** είναι το σύνολο των αριθμών που αποτελείται από τους ρητούς και από τους άρρητους. Πραγματικοί αριθμοί : $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

- **Πράξεις και Ιδιότητες**

  Αντιμεταθετική : $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, $\alpha\beta=\beta\alpha$

  Προσεταιριστική : $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$, $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$

  Ουδέτερο Στοιχείο : Πρόσθεση: $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$, Πολλαπλασιασμός: $\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$

  Αντίθετο και Αντίστροφο Στοιχείο :

  - $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$, οι αριθμοί α και $-\alpha$ λέγονται αντίθετοι.
  - $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha=1$, οι αριθμοί α και $\frac{1}{\alpha}$, με $\alpha\neq 0$ λέγονται αντίστροφοι.

  Επιμεριστική : $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

- **Οι Πράξεις της Αφαίρεσης και της Διαίρεσης**

  Ονομάζουμε διαφορά του β από το α δηλαδή : $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$. (Αφαίρεση είναι η πρόσθεση του αντιθέτου)

  Ονομάζουμε πηλίκο του α δια β δηλαδή $\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$, $\beta\neq 0$. (Διαίρεση είναι ο πολλαπλασιασμός του αντιστρόφου)

- **Πρόσθεση – Πολλαπλασιασμός Κατά Μέλη**

  Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \delta$

  Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ τότε $\alpha\gamma = \beta\delta$

- **Νόμος Διαγραφής**

  $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

  Αν $\gamma \neq 0$, τότε $\alpha\gamma = \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta$

- **Ιδιότητα Γινομένου**

  $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \acute{\eta}, \beta = 0$

  $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0, \kappa\alpha\iota, \beta \neq 0$

- **Δυνάμεις**

  Αν α πραγματικός αριθμός και ν φυσικός τότε:

  $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu-\varphi o\rho\varepsilon\varsigma}$, $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^0 = 1$ $(\alpha \neq 0)$, $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}$

  Αν ν περιττός : $\alpha^\nu = \beta^\nu \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ενώ αν ν άρτιος : $\alpha^\nu = \beta^\nu \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$

  $\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$, $\dfrac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}$, $(\alpha \cdot \beta)^\kappa = \alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa$, $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa = \dfrac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}$, $(\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa\cdot\lambda}$

- **Ταυτότητες**

  $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

  $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

  $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

  $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

  $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

  $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

  $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

ΠΡΟΣΟΧΗ ! ! !

- Ιδιότητα : $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, ή, \beta = 0$

  π.χ. $(6-3x)(x-1) = 0 \Leftrightarrow 6-3x = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

  ή $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

- Όταν έχουμε $\alpha\beta = \alpha\gamma$, χωρίς περιορισμό για το α, τότε : $\alpha\beta = \alpha\gamma \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha(\beta-\gamma) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow \beta = \gamma$

  π.χ. $x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

- $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \kappa\alpha\iota, \beta = 0$

- $(-\alpha-\beta)^2 = [-(\alpha+\beta)]^2 = (\alpha+\beta)^2$ δηλ. $(-\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2$

- $(-\alpha+\beta)^2 = (\beta-\alpha)^2 = \beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2$

- $(-\alpha-\beta)^3 = [-(\alpha+\beta)]^3 = -(\alpha+\beta)^3$

- $(-\alpha+\beta)^3 = (\beta-\alpha)^3$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Παραγοντοποίηση λέγεται η διαδικασία κατά την οποία μια παράσταση από άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων. Τα εργαλεία της παραγοντοποίησης είναι :

- **ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ**

  1. <u>ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ</u> **π.χ.1** $2y^2 - 5y = y(2y-5)$,

  π.χ.2 $x(x-3) - 2(3-x) = x(x-3) + 2(x-3) = (x-3)(x+2)$

  2. <u>ΚΑΤΑ ΟΜΑΔΕΣ</u> **π.χ.2** $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x-4) + 5(x-4) = (x-4)(3x^2+5)$

- **ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**

  1. ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

  2. ΔΙΑΦΟΡΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

  3. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

  π.χ.1 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

  i) $16x^2 - 1 = (4x)^2 - 1^2 = (4x-1)(4x+1)$

  ii) $(3x-1)^2 - 81 = (3x-1)^2 - 9^2 = (3x-1-9)(3x-1+9) = (3x-10)(3x+8)$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

1. (Άσκηση 1 σελ. 52 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

   Δίνεται η παράσταση : $\mathrm{A} = \left[(x^2 \cdot y^3)^{-2} \cdot (x \cdot y^3)^4\right] : \left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}$

   i. Να δείξετε ότι $\mathrm{A} = x^9 \cdot y^9$

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 2010$ και $y = \dfrac{1}{2010}$

Λύση :

i. $\mathrm{A} = \left[(x^2 \cdot y^3)^{-2} \cdot (x \cdot y^3)^4\right] : \left(\dfrac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3} = \left(x^{-4} \cdot y^{-6} \cdot x^4 \cdot y^{12}\right) : \dfrac{x^{-9}}{y^3} = \left(x^{-4+4} \cdot y^{-6+12}\right) \cdot \dfrac{y^3}{x^{-9}} =$

$x^0 \cdot y^6 \cdot y^3 \cdot \dfrac{1}{x^{-9}} = y^9 \cdot x^9 = x^9 \cdot y^9$

ii. Έχω $\mathrm{A} = x^9 \cdot y^9 = (x \cdot y)^9$ αν $x = 2010$ και $y = \dfrac{1}{2010}$ τότε :

$\mathrm{A} = \left(2010 \cdot \dfrac{1}{2010}\right)^9 = 1^9 = 1$

2. (Άσκηση 4 σελ. 52 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

i. Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\left(\dfrac{999}{1000} + \dfrac{1000}{999}\right)^2 - \left(\dfrac{999}{1000} - \dfrac{1000}{999}\right)^2$

Λύση :

i. Ένας τρόπος για να αποδείξω μια ισότητα είναι να ξεκινήσω από το ένα μέλος και με διαδοχικές ισότητες να καταλήξω στο άλλο :

$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) =$

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 =$

$= 2\alpha\beta + 2\alpha\beta = 4\alpha\beta$

ii. Από i. έδειξα ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$, άρα αν $\alpha = \dfrac{999}{1000}$ και $\beta = \dfrac{1000}{999}$ τότε :

$\left(\dfrac{999}{1000} + \dfrac{1000}{999}\right)^2 - \left(\dfrac{999}{1000} - \dfrac{1000}{999}\right)^2 = 4\dfrac{999}{1000}\dfrac{1000}{999} = 4$

3. (Άσκηση 6 σελ. 52 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών φυσικών ακεραίων (του μικρότερου από τον μεγαλύτερο) ισούται με το άθροισμα τους.

Λύση : Έστω ν ένας φυσικός ακέραιος, τότε ο ν+1 είναι ο επομένως φυσικός ακέραιος. Για να δείξω ότι η διαφορά των τετραγώνων τους (του μικρότερου από τον μεγαλύτερο) ισούται με το άθροισμα τους αρκεί να δείξω ότι :

$(\nu + 1)^2 - \nu^2 = \nu + (\nu + 1) \Leftrightarrow (\nu + 1)^2 - \nu^2 = 2\nu + 1$

Ξεκινώ από το πρώτο μέλος και έχω : $(\nu + 1)^2 - \nu^2 = \nu^2 + 2\nu + 1 - \nu^2 = 2\nu + 1$ άρα ισχύει.

4. (Άσκηση 1 σελ. 53 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

i. $\dfrac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha}$

ii. $\dfrac{(\alpha^2 - \alpha) + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1}$

Λύση :

i. Για να απλοποιήσω ένα κλάσμα, θα πρέπει πρώτα να παραγοντοποιήσω αριθμητή και παρανομαστή :

$$\frac{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}{\alpha^2-\alpha}=\frac{\alpha(\alpha^2-2\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{\alpha-1}=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha-1}=\alpha-1$$

ii. $$\frac{(\alpha^2-\alpha)+2\alpha-2}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha(\alpha-1)+2(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$

5. (Άσκηση 2 σελ. 53 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

i. $\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2\cdot\frac{\alpha^3+\alpha^2}{(\alpha+1)^3}$

ii. $\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha^2-1}{\alpha^3-1}$

Λύση :

i. $$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2\cdot\frac{\alpha^3+\alpha^2}{(\alpha+1)^3}=\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\right)^2\cdot\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{(\alpha+1)^3}=\frac{\left(\alpha^2-1\right)^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{(\alpha+1)^3}=$$

$$((\alpha-1)(\alpha+1))^2\cdot\frac{1}{(\alpha+1)^2}=(\alpha-1)^2\cdot(\alpha+1)^2\cdot\frac{1}{(\alpha+1)^2}=(\alpha-1)^2$$

ii. $$\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha^2-1}{\alpha^3-1}=\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}\cdot\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)}=1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6. Να υπολογίσετε την τιμή στις επόμενες παραστάσεις, αν οι x,y είναι αντίστροφοι :

i. $\mathrm{A}=\frac{2^{15}x^5(-3)^{16}y}{6^{14}x^4}$

ii. $\mathrm{B}=\left[\left(\frac{2^{15}x^5(-3)^{14}y}{6^{10}(6x)^4}\right)^{-1}\right]^{-2}$

iii. $\Gamma=\frac{\left[(x^2y^3)^{-1}(xy^3)^2\right]^2}{(x^3y)^{-3}}$

7. Να αποδείξετε τις ταυτότητες που ακλουθούν :

i. $\alpha^2-(\alpha-\beta)^2=2\alpha\beta-\beta^2$

ii. $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\quad(\alpha\neq 0)$

iii. $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta$

iv. $(x+y)^3-x^3-y^3=3xy(x+y)$

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $x^2=(x-1)(x+1)+1$. Στη συνέχεια με τη βοήθεια της να υπολογίσετε τις δυνάμεις : α) 99^2 β) 999^2 γ) 1999^2

9. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

i. $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^2-3x}$

ii. $\dfrac{x^2-x+5x-5}{x^2-1}$

iii. $\dfrac{x(x-4)+4}{(x-2)(x+1)}$

iv. $\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$

v. $\dfrac{(x-2)(x-3)-(3-x)(x-7)}{x^2-9}$

vi. $\dfrac{(x-1)(x+1)^3-x^4+1}{2x^3-2x}$

10. Αν x,y$\neq$0, να εκτελέσετε τις πράξεις:

i. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^5\cdot x^{-3}\cdot y^8$ ii. $\left(\dfrac{x^3}{y^{-2}}\right)^4\cdot\left(\dfrac{x^5}{y^{-3}}\right)^{-2}$ iii. $\left(\dfrac{x^4}{y^3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{y^2}{x^3}\right)^3$

iv. $\left(\dfrac{x^{-3}}{y^{-5}}\right)^{-3}:\left(\dfrac{x}{y^3}\right)^7$ v. $\left(x^6\cdot y^7\right)^{-2}:\left(x^{-5}\cdot y^{-4}\right)^3$ vi. $\left(x^5:y^4\right)^3:\left(x^4:y^2\right)^4$

11. Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων, αν x=8 και y=2:

A= $\left(x^4y^{-1}\right)^{-3}\cdot\left(x^3y^{-2}\right)^5\cdot y^2$ B= $\dfrac{\left(x^{-2}y\right)^{-4}}{(xy)^3\cdot(xy)^{-1}}$

12. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(x+2)^3-6(x+1)^2$ ii. $(2a-5)^2-4(a-2)(a+2)$

ii. $4(x-3)^2-(2x+6)^2$ iv. $(1-x)^3-x(x+2)(2-x)-3(x+1)^2$

13. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i. $(2x-3)^2-\left[2(x+1)\right]^2=5-20x$ ii. $\left(x^2+y^2\right)^2-(2xy)^2=\left[(x-y)(x+y)\right]^2$

iii. $(a+2\beta)^2+(2\alpha-\beta)^2=5\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]$ iv. $(x+2)^2-2(2-x)(2+x)=(2x)^2-(x-2)^2$

v. $x(x+1)^2-(2x)^2=(x-1)^2-(1-x)^3$ vi. $(\alpha-3)^3-9(1-\alpha)=\alpha^3-9(\alpha-2)^2$

vii. $(\omega+2)^3-6(\omega+1)^2=\omega^3+2$ viii. $(3-x)^3-(x-1)^2=18x^2+26-x(x+5)^2$

14. Αν ισχύει $(\alpha+1)^2-(\beta-1)^2-(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=6$ να αποδείξετε ότι α+β=3

15. Αν ισχύει ότι α-β=2, να αποδείξετε ότι : $\alpha^3-3\alpha^2=\beta^3+3\beta^2-4$

16. Να αποδείξετε ότι, αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε ισχύει :

$(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

17. Αν $x+\frac{1}{x}=5$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

i. $x^2+\frac{1}{x^2}$ ii. $x^3+\frac{1}{x^3}$.

18. Αν $\alpha+\beta=7$ και $\alpha\beta=10$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

i. $\alpha^2+\beta^2$ ii. $\alpha^3+\beta^3$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :
2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 12685

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$. (Μονάδες 12)

β) $\alpha=\beta$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 13088

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A=2(x+y)^2-(x-y)^2-6xy-y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$ (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B=2\cdot 2022^2-2020^2-6\cdot 2021-1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3 13053

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta+\gamma=-\alpha$. (Μονάδες 6)

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$. (Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι :

$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4 14473

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$

α) Να αποδείξετε ότι: $y=2x$ (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5 14458

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει : $(x+4y)(x+y)=9xy$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y-x)^2=0$ (Μονάδες 8)

ii. $y=\frac{x}{2}$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=10y^2$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 6 14489

Αν οι αριθμοί 2α − 1 και β − 1 είναι αντίστροφοι, με $α \neq 1$ και $β \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2α+β=2αβ$. (Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x=α-β$ και $y=α(1-2β)+2β$ είναι αντίθετοι. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 7 14555

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$(x-2y)^2-2(3-2xy)=5y^2-1$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2-y^2=5$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P=(x+y)^3(x-y)^3$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 8 13472

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $α^2=2α+β$ και $β^2=2β+α$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $α^2-β^2=α-β$. (Μονάδες 8)

ii. $α+β=1$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=α^2+β^2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 9 35388

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $α,β,γ,δ$ με $β\neq 0$ και $δ\neq γ$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{α+β}{β}=4 \text{ και } \frac{γ}{δ-γ}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $α=3β$ και $δ=5γ$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $Π=\frac{αγ+βγ}{βδ-βγ}$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 10 36884

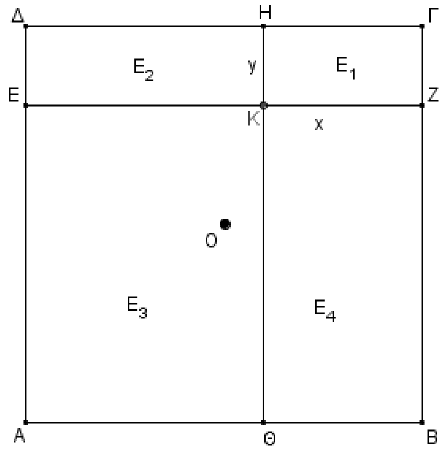
α) Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y, ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$. (Μονάδες 13)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 11 15052



Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες ΕΖ και ΗΘ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y.

(Μονάδες 8)

β)Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$. (Μονάδες 6)

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου. (Μονάδες 5)

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- **Ορισμός της Διάταξης :** $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ και $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$

- **Κανόνες Προσήμων Διάταξης :**
  i. $(\alpha > 0$ και $\beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$
  ii. $(\alpha < 0$ και $\beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$
  iii. α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow$ $\alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$
  iv. α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow$ $\alpha\beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$
  v. $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \Re$ (το ¨=¨ ισχύει μόνο όταν α=0)

- **Ιδιότητες των Ανισοτήτων**
  i. Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$
  ii. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
  iii. Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$
  iv. Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
  v. Αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε προσθέτω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha + \gamma > \beta + \delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)
  vi. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί τότε αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε πολλαπλασιάζω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha\gamma > \beta\delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να πολλαπλασιάσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

- **Διάταξη και Δυνάμεις**
  Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και ν φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει :
  i. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$
  ii. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$ (Προσοχή : αν α, β αρνητικοί τότε :
  $$\alpha > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^\nu > \beta^\nu, \ \alpha\nu \quad \nu \quad \pi\varepsilon\rho\rho\iota\tau\acute{o}\varsigma \\ \alpha^\nu < \beta^\nu, \ \alpha\nu \quad \nu \quad \acute{\alpha}\rho\tau\iota\sigma\varsigma \end{cases})$$

- **Διαστήματα**
  i. Κλειστό διάστημα : $\alpha \leq x \leq \beta \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta]$
  ii. Ανοιχτό διάστημα : $\alpha < x < \beta \Leftrightarrow x \in (\alpha, \beta)$
  iii. Ανοιχτό δεξιά διάστημα : $\alpha \leq x < \beta \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta)$
  iv. Ανοιχτό αριστερά διάστημα : $\alpha < x \leq \beta \Leftrightarrow x \in (\alpha, \beta]$
  v. $x \leq \alpha \Leftrightarrow x \in (-\infty, \alpha]$
  vi. $x < \alpha \Leftrightarrow x \in (-\infty, \alpha)$
  vii. $x \geq \alpha \Leftrightarrow x \in [\alpha, +\infty)$
  viii. $x > \alpha \Leftrightarrow x \in (\alpha, +\infty)$

ΠΡΟΣΟΧΗ ! ! !

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow -\alpha < -\beta$
- Δεν αντιστρέφουμε τα μέλη μιας ανισότητας, εκτός αν ξέρουμε το πρόσημο τους.
  Ισχύει : Αν α, β ομόσημοι και $\alpha > \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$
  Αν α, β ετερόσημοι και $\alpha > \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$
- Δεν υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέλη μιας ανισότητας, εκτός αν ξέρουμε ότι και τα δυο είναι θετικά οπότε η φορά παραμένει ίδια ή ότι και τα δυο είναι αρνητικά οπότε η φορά αλλάζει.
- Δεν μπορούμε να κάνουμε «χιαστή» σε ανισοτικές σχέσεις, εκτός αν ξέρουμε το πρόσημο των παρανομαστών οπότε και κάνουμε απαλοιφή.
- Πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό κατά μέλη γίνεται μόνο σε ανισότητες που έχουν την ίδια φορά. Δεν γίνεται ούτε αφαίρεση, ούτε διαίρεση κατά μέλη.
- $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \kappa\alpha\iota, \beta = 0$
- Όπως είπαμε αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και ν φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει : $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$. Αν όμως α, β είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί τότε για κάθε ν φυσικό αριθμό ισχύει : $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$ (το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα).
  Όμως ισχύει ότι : $\alpha^\nu = \beta^\nu \overset{\nu\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha = \beta \;\; ή \;\; \alpha = -\beta, & \alpha\nu \;\; \nu \;\; άρτιος \\ \alpha = \beta, & \alpha\nu \;\; \nu \;\; περιττός \end{cases}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 59 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
   Να δείξετε ότι :
   i. $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$
   ii. $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

   Λύση :
   i. $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot 3 + 3^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 \geq 0$ που ισχύει.
   ii. $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ που ισχύει.

2. (Άσκηση 1 σελ. 59 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
   Να δείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

   Λύση :
   $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot 1 + 1^2 + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
   $(\alpha - 1)^2 + \beta^2 \geq 0$ που ισχύει καθώς $(\alpha - 1)^2 \geq 0$ και $\beta^2 \geq 0$ άρα και για το άθροισμα τους θα ισχύει ότι $(\alpha - 1)^2 + \beta^2 \geq 0$.

Για την ισότητα : $\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1+\beta^2=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow$ $(\alpha-1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ και $\beta^2=0 \Leftrightarrow \beta=0$. Άρα η ισότητα ισχύει αν $\alpha=1, \beta=0$.

3. (Άσκηση 3 σελ. 59 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :
   i. Αν $(x-2)^2+(y+1)^2=0$
   ii. Αν $x^2+y^2-2x+4y+5=0$

<u>Λύση :</u>

i. $(x-2)^2+(y+1)^2=0 \Leftrightarrow$
$(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ και $(y+1)^2=0 \Leftrightarrow y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$

ii. $x^2+y^2-2x+4y+5=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=0 \Leftrightarrow$
$(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ και $(y+2)^2=0 \Leftrightarrow y+2=0 \Leftrightarrow y=-2$

4. (Άσκηση 4 σελ. 60 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Αν $4{,}5<x<4{,}6$ και $5{,}3<y<5{,}4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις :
   i. $x+y$ ii. $x-y$ iii. $\frac{x}{y}$ iv. x^2+y^2

<u>Λύση :</u>

i. $4{,}5<x<4{,}6$ (1) και $5{,}3<y<5{,}4$ (2)
Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω :
$4{,}5+5{,}3<x+y<4{,}6+5{,}4 \Leftrightarrow 9{,}8<x+y<10$

ii. Επειδή δεν γίνεται αφαίρεση ανισοτήτων κατά μέλη, θα σχηματίσω το –y πολλαπλασιάζοντας τη (2) με -1 οπότε έχω : $-5{,}3>-y>-5{,}4 \Leftrightarrow -5{,}4<y<-5{,}3$ (3)
Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (3) και έχω :
$4{,}5-5{,}4<x-y<4{,}6-5{,}3 \Leftrightarrow -0{,}9<x-y<-0{,}7$

iii. Επειδή δεν γίνεται διαίρεση ανισοτήτων κατά μέλη, θα σχηματίσω το $\frac{1}{y}$. Για να γίνει αυτό αντιστρέφουμε τα μέλη της (2) που είναι θετικά οπότε έχω : $\frac{1}{5{,}3}>\frac{1}{y}>\frac{1}{5{,}4} \Leftrightarrow$
$\frac{1}{5{,}4}<\frac{1}{y}<\frac{1}{5{,}3}$ (4). Πολλαπλασιάζω κατά μέλη (1) και (4) και έχω :
$4{,}5\cdot\frac{1}{5{,}4}<x\cdot\frac{1}{y}<4{,}6\cdot\frac{1}{5{,}3} \Leftrightarrow \frac{4{,}5}{5{,}4}<\frac{x}{y}<\frac{4{,}6}{5{,}3}$

iv. Πρέπει να σχηματίσω τα x^2, y^2. Τα μέλη των (1) και (2) είναι θετικά, άρα αν τα υψώσω στο τετράγωνο δεν αλλάζει η φορά τους. Δηλαδή :
$(4{,}5)^2<x^2<(4{,}6)^2 \Leftrightarrow 20{,}25<x^2<21{,}16$ (5)
$(5{,}3)^2<y^2<(5{,}4)^2 \Leftrightarrow 28{,}09<y^2<29{,}16$ (6) Προσθέτω κατά μέλη τις (5)&(6) και έχω
$20{,}25+28{,}09<x^2+y^2<21{,}16+29{,}16 \Leftrightarrow 48{,}34<x^2+y^2<50{,}32$

5. (Άσκηση 6 σελ. 60 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Αν $0 \le \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$.
Λύση :
Έχω ότι $0 \le \alpha < \beta$ άρα $1+\alpha > 0$ ομοίως και $0 \le \alpha < \beta$ άρα $1+\beta > 0$
Στην ανισότητα $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$ απαγορεύεται το χιαστή, μπορώ όμως να κάνω απαλοιφή παρανομαστών αφού γνωρίζω ότι το ΕΚΠ των παρανομαστών $(1+\alpha)(1+\beta) > 0$. Έχω :
$(1+\alpha)(1+\beta)\frac{\alpha}{1+\alpha} < (1+\alpha)(1+\beta)\frac{\beta}{1+\beta} \Leftrightarrow (1+\beta)\alpha < (1+\alpha)\beta \Leftrightarrow \alpha + \alpha\beta < \beta + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$
που ισχύει από το δεδομένο $0 \le \alpha < \beta$.

6. (Άσκηση 2 σελ. 60 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Αν $\alpha > 1 > \beta$, να δείξετε ότι $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$.
Λύση :
$\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta - 1 - \alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha - \alpha\beta + \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha(1-\beta) + \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\alpha(\beta-1) + \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow (\beta-1)(-\alpha+1) > 0 \Leftrightarrow (\beta-1)(1-\alpha) > 0$ (1). Αρκεί να δείξω ότι ισχύει η σχέση (1). Από τη σχέση $\alpha > 1 > \beta$ έχω ότι :
$1 > \beta \Leftrightarrow 0 > \beta - 1 \Leftrightarrow \beta - 1 < 0$. Επίσης :
$\alpha > 1 \Leftrightarrow 0 > 1 - \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0$. Άρα $(\beta-1)(1-\alpha) > 0$

7. (Άσκηση 4 σελ. 60 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να αποδείξετε ότι : i. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \ge 0$ ii. $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \ge 0$
Λύση :

i. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \ge 0 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 \ge 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \ge 0 \Leftrightarrow$
$(\alpha+\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \ge 0$ που ισχύει.

ii. $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \ge 0 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \ge 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \ge 0 \Leftrightarrow$
$(\alpha-\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \ge 0$ που ισχύει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Αν x,y είναι πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι :
   i. $x^2 + 1 \ge 2x$
   ii. $x^2 + 4y^2 \ge -4xy$
   iii. $(x+y)^2 \ge 4xy$

9. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β να αποδείξετε ότι :
   i. $\alpha^2 + \alpha\beta \ge \beta(3\alpha - \beta)$
   ii. $(1+\alpha^2)(1+\beta^2) \ge 4\alpha\beta$
   iii. $(\alpha^2+4)(\beta^2+4) \ge 4(\alpha+\beta)^2$

10. Αν $\alpha \ne 0$, να αποδείξετε ότι :
   i. $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \ge 2$ ii. $\frac{1}{\alpha^4} + 1 \ge \frac{2}{\alpha^2}$

11. Να αποδείξετε ότι :
   i. αν $x > 4$, τότε $5(x-1) > 15$
   ii. αν $\alpha > 3$ και $\beta > 1$, τότε $\alpha\beta + 3 > \alpha + 3\beta$
   iii. αν $\kappa \geq 4$ και $\lambda \leq 3$, τότε $\kappa(\lambda - 3) \leq 4\lambda - 12$

12. Να αποδείξετε ότι :
   i. $(\alpha^2+1)(\beta^2+4) \geq (2\alpha+\beta)^2$
   ii. αν $\alpha < 3 < \beta$ τότε : $\alpha\beta + 9 < 3(\alpha+\beta)$
   iii. Αν $\alpha > 1$ τότε : $\alpha^3 > \alpha^2 - \alpha + 1$
   iv. $x(x+6) \geq 2(x-2)$
   v. $25 - 2(x-3)^2 \geq 8x - (2x+1)^2$

13. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha + \beta = 6$, τότε :
   i. $\alpha\beta \leq 9$
   ii. $\alpha^2 + \beta^2 \geq 18$

14. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha + \beta \geq 0$, τότε :
   i. $\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha+\beta)$
   ii. $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{2} \geq \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$

15. Αν οι αριθμοί x,y είναι ομόσημοι με $x < y$, να αποδείξετε ότι : $x - y < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$.

16. Αν ισχύει : $x < y < z$, να αποδείξετε ότι : α) $x < \dfrac{3x+4y}{7} < y$ β) $x < \dfrac{x+y+z}{3} < z$

17. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει:
   i. $\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha - \beta) + 2 = 0$
   ii. $\alpha^2 + \beta^2 + 13 = 2(3\beta - 2\alpha)$
   iii. $\alpha^2 + \beta^2 = 4(\beta - 1)$
   iv. $(\alpha+5)^2 + (\beta-2)^2 = 4(\alpha+\beta+1)$

18. Αν α>0, να συγκρίνετε τους αριθμούς:
   i. $\alpha^2\beta - \alpha^3$ και $\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta$
   ii. $(\alpha+1)^3$ και $1 + 3\alpha + 3\alpha^2$

19. Να αποδείξετε ότι: i. $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$ ii. $2\alpha^2 - 10\alpha + 25 > 0$

20. Αν ισχύει 1<α<2 και -3<β<-2, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις: i. 4α-3β ii. $\alpha^2 + \beta^2$ iii. αβ-2

21. Αν $2 < x < 3$ και $3 < y < 5$, να αποδείξετε ότι :
   i. $12 < 3x + 2y < 19$
   ii. $-8 < -x - y < -5$
   iii. $0 < x - y + 3 < 3$
   iv. $\dfrac{2}{5} < \dfrac{x}{y} < 1$

22. Αν $1 < \alpha < 3$ και $2 < \beta < 7$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών είναι οι παραστάσεις :
   i. $\mathrm{A} = 2\alpha + 5\beta$
   ii. $\mathrm{B} = -\alpha + 4\beta - 3$
   iii. $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$

23. α) Να αποδειχθεί ότι: $(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta$

β) Ένα ορθογώνιο, του οποίου οι διαστάσεις είναι x και y, έχει περίμετρο 20m.

i. Να εκφραστεί το y με τη βοήθεια του x.

ii. Να εκφραστεί το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου με τη βοήθεια του x, χρησιμοποιώντας τη σχέση του ερωτήματος (α).

iii. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν Ε είναι μικρότερο ή ίσο των $25m^2$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα : 2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14492

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \le x \le 7$ και $2 \le y \le 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 37817

Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A} = x^4 + \dfrac{x^4-4}{x^2-2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$..

α) Να δείξετε ότι $\mathrm{A} = x^4 + x^2 + 2$. (Μονάδες 15)

β)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\mathrm{A} > 0$ για κάθε $x \neq \pm\sqrt{2}$. (Μονάδες 5)

ii. Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της; (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3 14410

Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $\mathrm{A} = \alpha^2 + \alpha + \dfrac{1}{4}$ και $\mathrm{B} = (\beta-3)^2$.

α)

i. Να δείξετε ότι $\mathrm{A}+\mathrm{B} \ge 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

ii. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β έτσι, ώστε $\mathrm{A}+\mathrm{B} = 0$. (Μονάδες 8)

β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\mathrm{A} = -\mathrm{B}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 37179

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2a^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $K \ge \Lambda$,για κάθε τιμή των α, β. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5 36899

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \ge 4$. (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \ge 16$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 6 35040

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$. (Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β. (Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 7 14475

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$. (Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 8 14704

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ (Μονάδες 5)

β) $2x - 3y$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 9 12673

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 10 13266

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$. (Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$. (Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 11 12922

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 12 13323

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 .$$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$. (Μονάδες 13)

3ο Θέμα

ΘΕΜΑ 13   14713

Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18}{\alpha^2+2\alpha}$, $\alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18=(\alpha^2+9)(\alpha+2)$. (Μονάδες 7)

β) Για κάθε $\alpha>0$ ισχύει

i. $A=\dfrac{\alpha^2+9}{\alpha}$. (Μονάδες 8)

ii. $A\ge 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A=6$; (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 14   14602

Αν $0<\alpha<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<\alpha^3<\alpha$. (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}.$$ (Μονάδες 12)

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- **Ορισμός Απόλυτης Τιμής :** $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu \quad \alpha < 0 \end{cases}$

- **Συνέπειες του Ορισμού :**

1. $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
2. $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
3. $|\alpha|^2 = \alpha^2$
4. Για κάθε $\theta > 0$ ισχύει : $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

   π.χ.1 $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

   π.χ.2 $|2x-1| = 3 \Leftrightarrow 2x-1 = 3$ ή $2x-1 = -3 \Leftrightarrow$

   $2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ή $2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$
5. $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

   π.χ.1 $|x+3| = 3|x-2| \Leftrightarrow x+3 = 3(x-2) \Leftrightarrow x+3 = 3x-6 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

   ή $x+3 = -3(x-2) \Leftrightarrow x+3 = -3x+6 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

- **Ιδιότητες Απολύτων Τιμών :**

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, π.χ. $|x^2-4| = |x^2-2^2| = |(x-2)(x+2)| = |x-2| \cdot |x+2|$

   Απόδειξη :

   Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά :

   $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$, που ισχύει.

2. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, π.χ. $\left|\frac{x^2-4}{x+2}\right| = \frac{|x^2-4|}{|x+2|} = \frac{|(x-2)(x+2)|}{|x+2|} = \frac{|x-2| \cdot |x+2|}{|x+2|} = |x-2|$

   Απόδειξη : Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

3. $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

   Απόδειξη :

   Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά :

   $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|$, που ισχύει.

   Είναι φανερό ότι η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

ΠΡΟΣΟΧΗ ! ! !

<u>ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ</u>

Όταν σε μια άσκηση υπάρχουν απόλυτες τιμές και θέλω να απαλλαγώ από αυτές τότε :

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή είναι πάντα θετική, τότε φεύγει η απόλυτη τιμή και η παράσταση που είναι μέσα της γράφεται όπως είναι. Δηλ. **π.χ.1** $|x^2+3| = x^2+3$, επειδή $x^2+3>0$ για κάθε $x \in \Re$.

  π.χ.2 $|\sqrt{7}-2| = \sqrt{7}-2 =$, επειδή $\sqrt{7}-2>0$

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή είναι πάντα αρνητική, τότε η απόλυτη τιμή γίνεται παρένθεση και βγαίνει ένα μείων (-) απέξω. Δηλ.

  π.χ.1 $|-x^2-3| = -(-x^2-3) = x^2+3$, επειδή $-x^2-3<0$ για κάθε $x \in \Re$.

  π.χ.2 $|\sqrt{8}-3| = -(\sqrt{8}-3) = -\sqrt{8}+3$, επειδή $\sqrt{8}-3<0$.

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις με βάση τον ορισμό. $|\mathrm{A}(x)| = \begin{cases} \mathrm{A}(x), & \alpha\nu \ \ \mathrm{A}(x) \geq 0 \\ -\mathrm{A}(x) & \alpha\nu \ \ \mathrm{A}(x) < 0 \end{cases}$.

  Δηλ $|x+3| = \begin{cases} x+3, & \alpha\nu \ \ x+3 \geq 0 \\ -(x+3), & \alpha\nu \ \ x+3<0 \end{cases} \Leftrightarrow |x+3| = \begin{cases} x+3, & \alpha\nu \ \ x \geq -3 \\ -x-3, & \alpha\nu \ \ x<-3 \end{cases}$

  Το ίδιο μπορεί να γίνει με πινακάκι και περιπτώσεις : Μηδενίζω την παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή, βρίσκω τη ρίζα ή τις ρίζες της και κάνω πινακάκι. Από το πινακάκι διακρίνω τις αντίστοιχες περιπτώσεις και βγάζω το πρόσημο της παράστασης στο διάστημα που θέλω. Δηλ. $|x+3|$, το $x+3$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο άρα, $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

x	-∞	-3	+∞
$x+3$	-	0	+

  - Αν $x \geq -3$ ή $x \in [-3,+\infty)$ τότε $|x+3| = x+3$ (αφού $x+3 \geq 0$ για κάθε $x \in [-3,+\infty)$)
  - Αν $x<-3$ ή $x \in (-\infty,-3)$ τότε $|x+3| = -(x+3) = -x-3$ (αφού $x+3<0$ για κάθε $x \in (-\infty,-3)$)

- $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot |\alpha_3| \cdot \ldots \cdot |\alpha_\nu|$

- $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$

- $||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha|+|\beta|$

- **Απόσταση Δυο Αριθμών :**

Ισχύει : $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$,

π.χ1. $d(-4,2)=|-4-2|=|-6|=6$

π.χ.2 $d(x,3)=5 \Leftrightarrow |x-3|=5 \Leftrightarrow x-3=5$ ή $x-3=-5 \Leftrightarrow$
$x=8$ ή $x=-2$

Επίσης :

1. $|x|<\rho \Leftrightarrow d(x,0)<\rho \Leftrightarrow -\rho<x<\rho \Leftrightarrow x\in(-\rho,\rho)$
2. $|x|>\rho \Leftrightarrow d(x,0)>\rho \Leftrightarrow x>\rho \text{ ή } x<-\rho \Leftrightarrow x\in(-\infty,-\rho)\cup(\rho,+\infty)$
3. $|x-x_0|<\rho \Leftrightarrow d(x,x_0)<\rho \Leftrightarrow x\in(x_0-\rho,x_0+\rho) \Leftrightarrow x_0-\rho<x<x_0+\rho$
4. $|x-x_0|>\rho \Leftrightarrow d(x,x_0)>\rho \Leftrightarrow x\in(-\infty,x_0-\rho)\cup(x_0+\rho,+\infty) \Leftrightarrow x<x_0-\rho, ή, x>x_0+\rho$

   π.χ.1 $|x+3|<4 \Leftrightarrow d(x,-3)<4 \Leftrightarrow x\in(-3-4,-3+4) \Leftrightarrow x\in(-7,1)$ ή $-7<x<1$

   π.χ.2 $|x-4|>2 \Leftrightarrow d(x,4)>2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,4-2)\cup(4+2,+\infty) \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(6,+\infty)$
   ή $x<2, ή, x>6$
5. Αν $x\in(\alpha,\beta) \Leftrightarrow d(x,x_0)<\rho \Leftrightarrow |x-x_0|<\rho$ με $x_0=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ και $\rho=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$
6. Αν $x\in(-\infty,\alpha)\cup(\beta,+\infty) \Leftrightarrow d(x,x_0)>\rho \Leftrightarrow |x-x_0|>\rho$ με $x_0=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ και $\rho=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 66 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

i. $|\pi-3|$

ii. $|\pi-4|$

iii. $|3-\pi|+|4-\pi|$

iv. $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-\sqrt{2}|$

Λύση :

i. Επειδή $\pi-3>0$, τότε $|\pi-3|=\pi-3$

ii. Επειδή $\pi-4<0$, τότε $|\pi-4|=-(\pi-4)=-\pi+4=4-\pi$

iii. Επειδή $3-\pi<0$ και $4-\pi>0$, τότε $|3-\pi|+|4-\pi|=-(3-\pi)+4-\pi=-3+\pi+4-\pi=1$

iv. Επειδή $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$ και $\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$, τότε
$|\sqrt{2}-\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-\sqrt{2}|=-(\sqrt{2}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})=-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2}=0$

2. (Άσκηση 2 σελ. 66 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Αν $3<x<4$ να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση : $|x-3|+|x-4|$

Λύση :
Επειδή $3<x<4$, τότε : $x-3>0$ και $x-4<0$
Οπότε : $|x-3|+|x-4|=x-3-(x-4)=x-3-x+4=1$

3. (Άσκηση 3 σελ. 66 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση : $|x-3|-|4-x|$ όταν :
i. $x<3$
ii. $x>4$

Λύση :
i. Επειδή $x<3 \Leftrightarrow x-3<0$, επίσης $x<3$ άρα και $x<4 \Leftrightarrow 0<4-x \Leftrightarrow 4-x>0$
Οπότε : $|x-3|-|4-x| = -(x-3)-(4-x) = -x+3-4+x = -1$

ii. Επειδή $x>4 \Leftrightarrow 0>4-x \Leftrightarrow 4-x<0$, επίσης $x>4$ άρα και $x>3 \Leftrightarrow x-3>0$
Οπότε : $|x-3|-|4-x| = x-3+(4-x) = x-3+4-x = 1$

4. (Άσκηση 4 σελ. 67 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Αν $\alpha \neq \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right|$

Λύση :
Έχω : $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right| = \dfrac{|\alpha-\beta|}{|\beta-\alpha|} = \dfrac{|\alpha-\beta|}{|-(\alpha-\beta)|} = \dfrac{|\alpha-\beta|}{|\alpha-\beta|} = 1$

5. (Άσκηση 2 σελ. 68 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Αν $\alpha>\beta$ να δείξετε ότι
i. $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$
ii. $\beta = \dfrac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}$

Λύση :
i. Επειδή $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0$
Οπότε : $\dfrac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2} = \dfrac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2} = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$

ii. Επειδή $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0$
Οπότε : $\dfrac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2} = \dfrac{\alpha+\beta-(\alpha-\beta)}{2} = \dfrac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2} = \dfrac{2\beta}{2} = \beta$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :
i. $\mathrm{A} = |\sqrt{6}+3|+|\sqrt{5}-3|-|1-\sqrt{6}|+|2-\sqrt{5}|$
ii. $\mathrm{B} = |1-\sqrt{2}|-|5+\sqrt{2}|+|-x^2-2|-|x^2+4|, \quad x \in \Re$
iii. $\Gamma = |5-\pi|+|\sqrt{8}+\pi|-|-\sqrt{8}-3|$

7. Αν $\alpha<2<\beta$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :
i. $\mathrm{A} = |\alpha-2|-|2-\beta|$ ii. $\mathrm{B} = |\alpha-2|+|\beta-2|$ iii. $\mathrm{A} = |\beta-\alpha|-2|\alpha-\beta|$

8. Αν $x<3$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις : $\mathrm{A}=|x-3|-2|x-4|+|x-5|$ και
$\mathrm{B}=5|3-x|+|2x-7|$

9. Αν $0<x<2$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις : $\mathrm{A}=|x+1|+|x+2|+2|x-2|$ και
$\mathrm{B}=|x-2|+|2x-5|+|3x|$

10. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση : $\mathrm{A}=|x+2|+|x-2|$ όταν :
i. $x<-2$ ii. $-2\le x<2$ iii. $x>2$

11. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής:
i. A=|x-3| ii. B= |x+2|+x iii. Γ= 2x-|x-1|
iv. Δ= x-|4-x| v. E= x+1-|2x-6| vi. Z= 3-|2-x|

12. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :
i. $\mathrm{A}=\dfrac{x^4+2|x^5|}{2|x|+1}$ ii. B=$\dfrac{x^2+2|x|}{|x|+2}$ iii.Γ= $\dfrac{|x|^3+3x^2}{2|x|+6}$ iv. Δ=$\dfrac{x^2+4|x|+4}{|x|+2}$
v. E=$\dfrac{x^2-1}{|x|+1}$ vi. $\mathrm{Z}=\dfrac{|x-1|}{|1-x|}+\dfrac{|2x+2|}{|-x-1|}+\dfrac{|x^2-1|}{|1-x^2|}$, $x\neq-1$ και $x\neq1$

13. Να αποδείξετε ότι:
i. $|\alpha+1|^2-4\alpha=|\alpha-1|^2$ ii. $(|a|-|\beta|)^2+2|\alpha\beta|=\alpha^2+\beta^2$
iii. $|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2(|\alpha|^2+|\beta|^2)$ iv. $\alpha^2-(|\alpha|-|\beta|)(|\alpha|+|\beta|)=\beta^2$

14. Αν α<1<β, να βρείτε την τιμή της παράστασης: K=d(1,α)+d(1,β)-d(α,β).

15. Να απλοποιηθεί η παράσταση $\mathrm{A}=\dfrac{|x+2|-|x-2|}{|x+2|+|x-2|}$ για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

16. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-3|<1$
i. Να αποδείξετε ότι : $x\in(2,4)$
ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $K=\dfrac{|x-4|+|x-2|}{2}+|3x-6|+3|x-5|+\left|\dfrac{x-1}{1-x}\right|$.

17. Να απλοποιηθεί η παράσταση $\mathrm{A}=\dfrac{|2x-6|+1}{4x^2-49}$ για $x\in(-\infty,3]$.

18. Αν η απόσταση του x από το y στον πραγματικό άξονα είναι 4, να γραφεί χωρίς απόλυτη τιμή η παράσταση : $\mathrm{A}=|x-y|+|-3y+3x|$.

19. Αν $|x|<1$ και $|y|<2$ να δείξετε ότι : i. $|x+y|<3$ ii. $|x-y|<3$ iii. $-10<3x-2y-3<4$

20. Δίνεται η παράσταση : $A = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α.
ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $A > 3$.

21. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x\|<3$		
$\|x\|\leq 4$		
$\|x\|>2$		
$\|x\|\geq 5$		
		$x \in [-1,1]$
		$x \in (-6,6)$
		$x \in (-\infty,-8] \cup [8,+\infty)$
		$x \in (-\infty,-10) \cup (10,+\infty)$
	$d(x,3) < 5$	
	$d(x,-4) \leq 7$	
	$d(x,-3) > 5$	
	$d(x,1) \geq 3$	

Θέματα τράπεζας για την ενότητα : 2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικών Αριθμών

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14617

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6,8)$. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6,8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3,4)$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 14572

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $|x+2|<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$. (Μονάδες 10)

β) $|2x+4|<2$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3 14412

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $\alpha>\beta$, με $\beta>1$ και $\alpha>1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = 2$. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha+\beta > \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4 14491

α) Να λυθεί η ανίσωση $|y-3|<1$ (Μονάδες 12)

β) Αν x,y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5 13177

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α,β για τους οποίους ισχύει $2\le\alpha\le3$ και $-2\le\beta\le-1$.

α) Να δείξετε ότι : $|\alpha-3|=3-\alpha$ και $|\beta+2|=\beta+2$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $0\le\alpha+\beta\le2$. (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha+\beta|+|\alpha-3|-|\beta+2|$ είναι ίση με 1. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 6 14730

Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=|x-2|+3, x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε

i. Την τιμή της παράστασης A για $x=2^3-3^2$. (Μονάδες 8)

ii. Τις τιμές του x, ώστε να ισχύει $\mathrm{A}=5$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 7 37201

Δίνεται η παράσταση $A=|x-1|+|y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$. (Μονάδες 12)

β) $0<A<4$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 8 36898

α) Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}$, να δείξετε ότι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\ge2$ (1). (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 9 36894

α) Αν $\alpha<0$, να δείξετε ότι: $\alpha+\frac{1}{\alpha}\le-2$. (Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha<0$, να δείξετε ότι: $|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\ge2$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 10 35412

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5<x<10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές. (Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}$$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 11 35112

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x\geq 2$, $\mathrm{A}=3x-4$.

ii. για κάθε $x<2$, $\mathrm{A}=8-3x$ (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x\geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 12 35041

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x\leq\frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x\leq\frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13 35043

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$. (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 14 35044

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y\in(1,3)$. (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{|y-1|+|y-3|}{2}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 15 37200

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$,

α)Να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K=\frac{|x+3|+|x-1|}{4}$, είναι αριθμός ανεξάρτητος του x. (Μονάδες 13)

3ο Θέμα

ΘΕΜΑ 16 14753

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x|-2\leq 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι $x\in[-1,1]$. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4. (Μονάδες 5)

γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παρακάτω παράσταση Α χωρίς τις απόλυτες τιμές.

$\mathrm{A}=|2x-3|-|4-3x|$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 17 35296

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| \geq 5$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των α) και β). (Μονάδες 8)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 18 13179

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \dfrac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\dfrac{\alpha}{\beta}-1\right|$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 19 36671

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x. (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4| + |x-14| = 18$$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 20 36672

Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2| + |x-7|$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = |x+2| + |x-7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 21 33888

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β. (Μονάδες13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{K}=|\alpha-1|+|1-\beta|.$$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 22 33896

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $|\alpha-2|<1$ και $|\beta-3|\le 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1<\alpha<3$. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο β. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $2\alpha-3\beta$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $\dfrac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 23 13179

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α,β για τους οποίους ισχύει $1\le\beta\le 2$ και $2\le\alpha\le 4$.

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha}\le 1\le\dfrac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\dfrac{\alpha}{\beta}-1\right|$.

(Μονάδες 6)

2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- **Ορισμός Τετραγωνικής Ρίζας :** *Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με* $\sqrt{\alpha}$ *και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.* Δηλαδή : $x=\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow x^2=\alpha$, με $\alpha \geq 0$ και $x \geq 0$. Η $\sqrt{\alpha}$, με $\alpha \geq 0$, παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2=\alpha$.

- **Ιδιότητες Τετραγωνικής Ρίζας :**

  1. Αν $\alpha \geq 0$, τότε : $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$ ή $\sqrt{\alpha}^2=\alpha$
  2. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε : $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ και $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\beta \neq 0$
  3. Για κάθε πραγματικό αριθμό α είναι : $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$ (Προσοχή : $\sqrt{\alpha}^2=\alpha$)

- **Ορισμός ν-οστης Ρίζας :** *Η ν-οστη ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με* $\sqrt[\nu]{\alpha}$ *και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στη ν, δίνει τον α.* Δηλαδή : $x=\sqrt[\nu]{\alpha} \Leftrightarrow x^\nu=\alpha$, με $\alpha \geq 0$ και $x \geq 0$. Η $\sqrt[\nu]{\alpha}$, με $\alpha \geq 0$, παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$.
  π.χ. $\sqrt[3]{27}=3$ γιατί $3^3=27$. Η $\sqrt[3]{27}=3$ είναι η μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^3=27$.
  Επίσης : $\sqrt[1]{\alpha}=\alpha$, ενώ $\sqrt[2]{\alpha}=\sqrt{\alpha}$

- **Ιδιότητες Ριζών :**

  1. Αν $\alpha \geq 0$, τότε : $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu=\alpha$ ή $\sqrt[\nu]{\alpha}^\nu=\alpha$, αλλά και $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\alpha$
  2. Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$
  3. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε : $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$ και $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\beta \neq 0$

     <u>**Απόδειξη :**</u>

     Έχουμε : $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu=\left(\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}\right)^\nu \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu\cdot\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu=\alpha\cdot\beta \Leftrightarrow$
     $\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta$ που ισχύει.

  4. Αν $\alpha \geq 0$, τότε : $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\nu\mu]{\alpha}$, π.χ. $\sqrt{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[6]{7}$
  5. Αν $\alpha \geq 0$, τότε : $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, π.χ.1 $\sqrt[12]{16}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[3\cdot4]{2^4}=\sqrt[3]{2}$
     π.χ.2 $\sqrt[15]{8^5}=\sqrt[3\cdot5]{8^5}=\sqrt[3]{8}=2$
  6. Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε : $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

     π.χ.1 $\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}}$, π.χ.2 $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, π.χ.3 $\sqrt[11]{5^4}=5^{\frac{4}{11}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ ! ! !

- Όταν κάτω από τη ρίζα υπάρχει αριθμός που είναι τέλειο τετράγωνο τότε εύκολα υπολογίζω το αποτέλεσμα. π.χ. $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{144}=12$ κτλ. Όταν όμως ο αριθμός δεν είναι τέλειο τετράγωνο κοιτώ μήπως μπορώ να απλοποιήσω τη ρίζα γράφοντας τον αριθμό σαν γινόμενο δυο αριθμών εκ των οποίων ο ένας να είναι τέλειο τετράγωνο.
  π.χ.1 $\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 4}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}=2\sqrt{2}$
  π.χ.2 $\sqrt{32}=\sqrt{2\cdot 16}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{16}=4\sqrt{2}$
  π.χ.3 $\sqrt{75}=\sqrt{3\cdot 25}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{25}=5\sqrt{3}$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει μια ρίζα, τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη ρίζα αυτή ώστε να προκύψει κλάσμα που στον παρανομαστή δεν έχει ρίζα.
  π.χ.1 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
  π.χ.2 $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει παράσταση της μορφής $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\alpha}\pm\beta$, $\alpha\pm\sqrt{\beta}$, τότε για να απαλλαγώ από τη ρίζα στον παρανομαστή πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρανομαστή.
  π.χ.1 $\dfrac{2}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{2(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)\cdot(\sqrt{5}-2)}=\dfrac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}^2-2^2}=\dfrac{2\sqrt{5}-4}{5-4}=2\sqrt{5}-4$
  π.χ.2 $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{6})}{(\sqrt{5}-\sqrt{6})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{6})}=\dfrac{\sqrt{6}\sqrt{5}+\sqrt{6}^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{6}^2}=\dfrac{\sqrt{30}+6}{5-6}=-\left(\sqrt{30}+6\right)=-\sqrt{30}-6$
  π.χ.3 $\dfrac{3}{2\sqrt{3}-3}=\dfrac{3\cdot(2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}-3)\cdot(2\sqrt{3}+3)}=\dfrac{6\sqrt{3}+9}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-9}=\dfrac{6\sqrt{3}+9}{12-9}=\dfrac{3\left(2\sqrt{3}+3\right)}{3}=2\sqrt{3}+3$

- Απαραίτητη προϋπόθεση όταν έχουμε ρίζα είναι η υπόριζη ποσότητα να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν.
  π.χ.1 η παράσταση $\sqrt{x-3}$ έχει νόημα μόνο όταν $x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 3$
  π.χ.2 η παράσταση $\sqrt[3]{6-2x}$ έχει νόημα μόνο όταν $6-2x\geq 0 \Leftrightarrow 6\geq 2x \Leftrightarrow 3\geq x \Leftrightarrow x\leq 3$
  π.χ.3 η παράσταση $\sqrt{\pi-4}$ δεν έχει νόημα, δηλαδή είναι λάθος, αφού $\pi-4<0$

- Αν $x,y\geq 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία : $x\leq y \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{x}\leq\sqrt[\nu]{y}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
   Να υπολογίσετε τις ρίζες :
   i. $\sqrt{100}$ $\sqrt[3]{1000}$ $\sqrt[4]{10000}$ $\sqrt[5]{100000}$
   ii. $\sqrt{4}$ $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[4]{16}$ $\sqrt[5]{32}$
   iii. $\sqrt{0{,}01}$ $\sqrt[3]{0{,}001}$ $\sqrt[4]{0{,}0001}$ $\sqrt[5]{0{,}00001}$

Λύση :

i. $\sqrt{100}=\sqrt{10^2}=10$ $\quad\sqrt[3]{1000}=\sqrt[3]{10^3}=10$ $\quad\sqrt[4]{10000}=\sqrt[4]{10^4}=10$ $\quad\sqrt[5]{100000}=\sqrt[5]{10^5}=10$

ii. $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$ $\quad\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$ $\quad\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$ $\quad\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

iii. $\sqrt{0{,}01}=\sqrt{\frac{1}{100}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}}=\frac{1}{10}$ $\quad\sqrt[3]{0{,}001}=\sqrt[3]{\frac{1}{1000}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1000}}=\frac{1}{10}$

$\sqrt[4]{0{,}0001}=\sqrt[4]{\frac{1}{10000}}=\frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{10000}}=\frac{1}{10}$ $\quad\sqrt[5]{0{,}00001}=\sqrt[5]{\frac{1}{100000}}=\frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{1000000}}=\frac{1}{10}$

2. (Άσκηση 2 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
   Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς τις ρίζες :
   i. $\sqrt{(\pi-4)^2}$
   ii. $\sqrt{(-20)^2}$
   iii. $\sqrt{(x-1)^2}$
   iv. $\sqrt{\frac{x^2}{4}}$

Λύση :

i. $\sqrt{(\pi-4)^2}=|\pi-4|\overset{\pi-4<0}{=\!=\!=\!=}-(\pi-4)=-\pi+4=4-\pi$

ii. $\sqrt{(-20)^2}=|-20|=20$

iii. $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=\begin{cases}x-1, \alpha\nu\_x-1\geq 0\\ -(x-1), \alpha\nu\_x-1<0\end{cases}=\begin{cases}x-1, \alpha\nu\_x\geq 1\\ -x+1, \alpha\nu\_x<1\end{cases}=\begin{cases}x-1, \alpha\nu\_x\geq 1\\ 1-x, \alpha\nu\_x<1\end{cases}$

iv. $\sqrt{\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{4}}=\frac{|x|}{2}$

3. (Άσκηση 3 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
   Να δείξετε ότι : $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=1$

   Λύση : Έχω $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=|2-\sqrt{5}|+|3-\sqrt{5}|\underset{3-\sqrt{5}>0}{\overset{2-\sqrt{5}<0}{=\!=\!=\!=\!=}}-(2-\sqrt{5})+3-\sqrt{5}=$

   $=-2+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}=1$

4. (Άσκηση 4 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
   Να δείξετε ότι : $\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}\right)=-8$
   Λύση : Πρώτα πρέπει να πάρω περιορισμούς, πρέπει :
   $x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 5$ (1) και $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$ (2). Άρα από (1) και (2) έχω $x\geq 5$.
   Έχω : $\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}\right)\overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\sqrt{x-5}^2-\sqrt{x+3}^2=x-5-(x+3)=$
   $=x-5-x-3=-8$

5. (Άσκηση 5 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
   Να δείξετε ότι :
   i. $\left(\sqrt{8}-\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32}\right)=-14$
   Λύση :
   i. Έχω $\left(\sqrt{8}-\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32}\right)=\left(\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{9\cdot 2}\right)\left(\sqrt{25\cdot 2}+\sqrt{36\cdot 2}-\sqrt{16\cdot 2}\right)=$
   $=\left(\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}\right)=\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4\sqrt{2}\right)=$
   $=\left(-\sqrt{2}\right)\left(7\sqrt{2}\right)=-7\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=-7\sqrt{2}^2=-7\cdot 2=-14$

6. (Άσκηση 6 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
   Να δείξετε ότι :
   ii. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}=2$
   Λύση :
   ii. Έχω $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3^2-\sqrt{5}^2}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9-5}=$
   $=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\cdot 4}=\sqrt[3]{8}=2$

7. (Άσκηση 7 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
   Να δείξετε ότι :
   ii. $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$
   Λύση :
   ii. Έχω $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt[6]{2^4}}=\sqrt[5]{\sqrt[6]{2^6\cdot 2^4}}=\sqrt[30]{2^{10}}=\sqrt[3\cdot 10]{2^{10}}=\sqrt[3]{2}$

8. (Άσκηση 8 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
   Να δείξετε ότι :
   ii. $\sqrt[9]{2^8}\cdot\sqrt[6]{2^5}=2\cdot\sqrt[18]{2^{13}}$
   Λύση :
   ii. Έχω $\sqrt[9]{2^8}\cdot\sqrt[6]{2^5}=2^{\frac{8}{9}}\cdot 2^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{8}{9}+\frac{5}{6}}=2^{\frac{16}{18}+\frac{15}{18}}=2^{\frac{31}{18}}=2^{\frac{18}{18}+\frac{13}{18}}=2^{1+\frac{13}{18}}=2\cdot 2^{\frac{13}{18}}=2\cdot\sqrt[18]{2^{13}}$

9. (Άσκηση 10 σελ. 75 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
   Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρανομαστές :
   iii. $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$
   Λύση :
   iii. Έχω $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\dfrac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^2}{\sqrt{7}^2-\sqrt{6}^2}=\dfrac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^2}{7-6}=\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^2=$
   $\sqrt{7}^2+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{6}^2=7+2\sqrt{42}+6=13+2\sqrt{42}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\sqrt[7]{5^4}\cdot\sqrt[7]{5^3}$ ii. $\sqrt[6]{3^5}\cdot\sqrt[6]{3}$ iii. $\dfrac{\sqrt[5]{4^9}}{\sqrt[5]{4^4}}$ iv. $\sqrt[5]{7^{11}}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{1}{7^6}}$ v. $\dfrac{\sqrt[7]{5^8}\cdot\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^5}}$ vi. $\dfrac{\sqrt[5]{3^6}\cdot\sqrt[5]{3^8}}{\sqrt[5]{3^9}}$

11. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i. A= $(\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{27})\sqrt{3}$ ii. B= $(\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{18})\sqrt{8}$

iii. Γ= $(\sqrt{20}+\sqrt{45})(\sqrt{80}-\sqrt{5})$ iv. Δ= $(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54})\sqrt[3]{4}$

12. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$ ii. $(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})$

iii. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-2\sqrt{6}$ iv. $2\sqrt{5}-(\sqrt{5}+1)^2$

13. Να δείξετε ότι :

i. $A=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ii. $B=\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3}}}=\sqrt[12]{3}$ iii. $\Gamma=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}=\sqrt[6]{3^5}$ iv. $\Delta=\sqrt[5]{5^2\sqrt{5\sqrt{5}}}=\sqrt[20]{5^{11}}$

14. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις :

i. $\sqrt{x+1}$ ii. $\sqrt[4]{-2x+4}$ iii. $\sqrt[7]{9-3x}$

15. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι επόμενες παραστάσεις.

i. A= $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}$ ii. B= $\sqrt{2x-6}-\sqrt[3]{x-5}$ iii. Γ= $\dfrac{\sqrt[3]{3x+12}}{\sqrt[4]{7-x}}$

iv. Δ= $\sqrt{12-4x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2x-14}}$

16. Αν ισχύει ότι: $x=2-\sqrt{3}$ και $y=2+\sqrt{3}$ να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i. A= $(y-x)^2$ ii. B= x^2+y^2 iii. Γ= xy iv. Δ= $x^2+3xy+y^2$

17. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i. A= $\sqrt{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ii. B= $\sqrt{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{50}-\sqrt{32})\cdot\sqrt{6}}\cdot\sqrt{6}$

iii. Γ= $\sqrt[3]{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2(7-2\sqrt{10})}$ iv. Δ= $\sqrt[3]{\dfrac{3}{8}}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{2}-3}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{2}+3}$

18. i. Να βρείτε τα αναπτύγματα $(\sqrt{3}+2)^2$ και $(\sqrt{3}-2)^2$.

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: A= $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}$

19. Αν ισχύει -1<x<3, να απλοποιήσετε την παράσταση A= $\dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

20. Δίνεται η παράσταση: Α= $(\sqrt{x+4}-\sqrt{2-x})(\sqrt{x+4}+\sqrt{2-x})$

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α.
ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

21. Να δείξετε ότι : $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-7}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-7}\right)=9$.

22. Να δείξετε ότι : $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}+\sqrt{(5-\sqrt{10})^2}=2$

23. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρανομαστές: i. $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ ii. $\frac{-6}{\sqrt{5}-4}$ iii. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}-3}$ iv. $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{243}}{\sqrt{48}+\sqrt{147}}$ v. $\frac{9\sqrt{20}}{2\sqrt{45}}$

24. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :
i. $\mathrm{A}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(\pi-2\sqrt{2}\right)^3}-\sqrt[5]{\left(\pi+\sqrt{7}\right)^5}+\sqrt[6]{\left(1-3\sqrt{2}\right)^6}$
ii. $\mathrm{B}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}+2\sqrt[4]{(2-x)^4}-\sqrt[6]{(2x-4)^6}+\sqrt[8]{\left(\sqrt{3}-1\right)^8}-3\sqrt[10]{(-2)^{10}}$

25. Αν $\alpha,\beta\geq 0$, να αποδείξετε ότι:
i. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2\geq 4\sqrt{\alpha\beta}$
ii. $\frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}{2}\leq\alpha+\beta$
iii. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})\geq 2(\sqrt{\alpha\beta}-\beta)$
iv. $\sqrt{\frac{\alpha+4\beta}{2}}\geq\frac{\sqrt{\alpha}+2\sqrt{\beta}}{2}$

26. Δίνεται ο αριθμός : α=$\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2-\sqrt{12}}$
i. Να βρείτε τον αριθμό α.
ii. Να βρείτε τον αριθμό β=$\sqrt{8}\cdot(\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha}}\cdot\sqrt{\alpha-\sqrt{\alpha}}$
iii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: Α= $(\sqrt{6+\beta\sqrt{\alpha}}-3)(1+\sqrt{2})$

27. Να μετατρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρανομαστή:
i. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ii. $\frac{4}{\sqrt[5]{2}}$ iii. $\frac{1}{\sqrt{3\sqrt[3]{2}}}$ iv. $\frac{20}{\sqrt[5]{6^3}\cdot\sqrt[4]{5}}$
v. $\frac{4}{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$ vi. $\frac{8}{\sqrt[3]{3}\cdot(3-\sqrt{5})}$ vii. $\frac{12}{\sqrt[6]{2^5}\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{6})}$ viii. $\frac{6}{\sqrt[7]{3^4}\cdot(\sqrt{5}-1)}$

28. Αν α≥ 0, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μιας ρίζας:
i. Α= $\sqrt{\alpha^4\cdot\sqrt[4]{\alpha\cdot\sqrt[3]{\alpha^5}}}$
ii. Β= $\sqrt[3]{\alpha\cdot\sqrt[5]{\alpha\cdot\sqrt{\alpha^3}}}$
iii. Γ= $\sqrt[7]{\alpha^4\cdot\sqrt[3]{\alpha\cdot\sqrt[4]{\alpha^7}}}$
iv. Δ= $\sqrt[3]{\alpha^2\cdot\sqrt[3]{\alpha^4\cdot\sqrt[4]{\alpha^3\cdot\sqrt[5]{\alpha}}}}$

29. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις :
i. $\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}-\frac{\sqrt{x^2}}{x}$, αν $d(x,1)<1$
ii. $\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{-x}}\cdot\frac{\sqrt{-x^2-2x}}{\sqrt{x+2}}$, αν $d(x,-1)<1$

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :
2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14682

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 14774

α) Να δείξετε ότι $\left(2+\sqrt{5}\right)^2=9+4\sqrt{5}$ και $\left(1-\sqrt{5}\right)^2=6-2\sqrt{5}$. (Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=1+2\sqrt{5}.$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3 14599

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x|<2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1<x<1$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(-1,1)$, ισχύει $x^2<1$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4 14452

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{3}-1$ και $\beta=\sqrt{3}+1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=10$. (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}+1=5$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 5 12943

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ και $\beta=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$ και το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$ (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=7$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 6 14750

Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α , β , με $\alpha=1+2\sqrt{2}$ και $\beta=\sqrt{2}-2$.

Να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2+\beta^2=15$. (Μονάδες 12)

β) $\sqrt{\alpha^2}+2\sqrt{\beta^2}=5$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 7 37199

Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{2})^6$ και $B=(\sqrt[3]{2})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$. (Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι: $1<\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 8 37198

Δίνεται η παράσταση $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 9 37197

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=-3$ να αποδείξετε ότι $A^3+A^2+A+1=0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 10 37192

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις)

$\sqrt{2}\cong 1{,}41$, $\sqrt{3}\cong 1{,}73$, $\sqrt{5}\cong 2{,}24$, $\sqrt{7}\cong 2{,}64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$. (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 11 36778

Δίνεται η παράσταση $K=\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 12 14849

α) Να αποδείξετε ότι $2<\sqrt{5}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2-\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 13 34157

Αν είναι $\mathrm{A}=2-\sqrt{3}$, $\mathrm{B}=2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 14 34152

Δίνονται οι παραστάσεις: $\mathrm{A}=\sqrt{\left(x-2\right)^2}$ και $\mathrm{B}=\sqrt[3]{\left(2-x\right)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\le 2$, ισχύει $\mathrm{A}=\mathrm{B}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 15 15051

α) Να αποδείξετε ότι $\left(2-\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $\left(2+\sqrt{5}\right)^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9-4\sqrt{5}$ και $9+4\sqrt{5}$. (Μονάδες 13)

3ο Θέμα

ΘΕΜΑ 16 37172

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A=\left(\sqrt{2}\right)^6,\ B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6,\quad \Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$. (Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 17 14805

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\alpha=\left|3\sqrt{2}-4\right|+2\left|\sqrt{2}-2\right|$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=\sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2}=1{,}41$) (Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3=2\alpha$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\alpha^3+(\alpha-1)^2$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 18 34155

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5},\quad B=\sqrt{3},\quad \Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\Gamma=\sqrt{15}$. (Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$. (Μονάδες 10)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 19 14931

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α,β, με $\alpha=1+\sqrt{2}$ και $\beta=1-\sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\alpha^2-\beta^2$. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{B}=\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν $\mathrm{A}=4\sqrt{2}$ και $\mathrm{B}=2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}>\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}$. (Μονάδες 10)