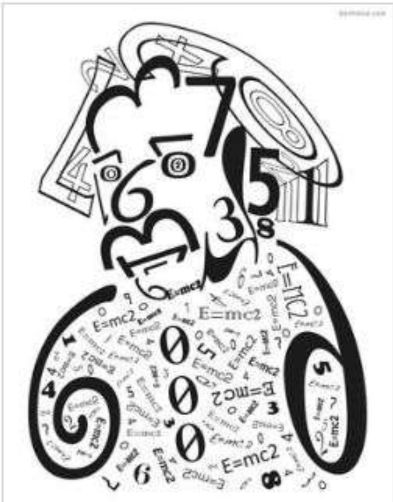
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ & ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ :

ΠΑΛΑΙΟΛΟΓΟΥ ΠΑΥΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

1. ΔΥΝΑΜΕΙΣ : Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

- ✓ Αν α πραγματικός αριθμός και ν φυσικός τότε:

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu-\phi o \rho \varepsilon \varsigma} \ , \ \alpha^{1} = \alpha \ , \ \alpha^{0} = 1 \ (\alpha \neq 0) \ , \ \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}} \ , \ \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

- ✓ Αν ν περιττός : $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu} \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ενώ αν ν άρτιος : $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu} \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$
- ✓ $\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$, $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$, $(\alpha \cdot \beta)^{\kappa} = \alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa}$, $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}$, $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$

π.χ.1 $3x^3 \cdot x^2 = 3x^{3+2} = 3x^5$

π.χ.2 $x \cdot x^2 = x^{1+2} = x^3$

π.χ.3 $2x \cdot 3x = 6x^{1+1} = 6x^2$ (Προσοχή : $x \cdot x = x^{1+1} = x^2$, ενώ $x + x = 2x$)

π.χ.4 $\dfrac{2x^5}{3x^2} = \dfrac{2}{3}x^{5-2} = \dfrac{2}{3}x^3$

π.χ.5 $(2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$

π.χ.6 $(-3x)^2 = (-3)^2 \cdot x^2 = 9x^2$

π.χ.7 $(4x^3)^3 = 4^3 \cdot (x^3)^3 = 64x^{3\cdot 3} = 64x^9$

π.χ.8 $\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^3 = \dfrac{(x^2)^3}{2^3} = \dfrac{x^{2\cdot 3}}{8} = \dfrac{x^6}{8}$

π.χ.9 $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

π.χ.10 $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u> Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i. $2x^2 \cdot 5x^4 =$	ii. $-3x \cdot 2x =$	iii. $\dfrac{6x^4}{2x^3} =$
iv. $(3x)^2 =$	v. $(-4x)^2 =$	vi. $(2x^3)^2 =$
vii. $\left(\dfrac{2x^3}{4}\right)^2 =$	viii. $\sqrt[3]{x^4} =$	ix. $2x^{\frac{1}{2}} =$

2. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ :

$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ (Προσοχή: $(-\alpha-\beta)^2 = [-(\alpha+\beta)]^2 = (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$)

$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ (Προσοχή : $(-\beta+\alpha)^2 = (\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$)

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u> Να βρείτε τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων : i) $(x+2)^2$ ii) $(2x-3)^2$
iii) $(x+\sqrt{2})^2$ iv) $(x-\frac{3}{2})^2$ v) x^2-9 vi) $4x^2-25$ vii) x^3-8 viii) x^3+27
ix) $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$ x) $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$ xi) $(-4x+5)^2$ xii) $(-2x-3)^2$ xiii) $(x+1)^3$
xiv) $(2x+3y)^2$ xv) $(x^2+2)^2$ xvi) $(x-2)^3$ xvii. $(3x-2)^2$

3. ΡΙΖΕΣ

Ισχύουν οι ιδιότητες :

- $\sqrt[2\nu]{x^{2\nu}} = |x|$, $x \in \Re$ και ν θετικός ακέραιος. (Συνήθως : $\sqrt{x^2} = |x|$, $\sqrt[4]{x^4} = |x|$)
- $\sqrt[\nu]{x^{\nu}} = x$, x θετικός ή 0 και ν θετικός ακέραιος. (Συνήθως : $\sqrt{x}^2 = x$, $\sqrt[3]{x}^3 = x$)
- $\sqrt[\nu]{x^{\mu}} = x^{\frac{\mu}{\nu}}$, x θετικός ή 0 και ν , μ θετικοί ακέραιοι.(Συνήθως : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$)
- $\sqrt[\nu]{x^{2\mu}} = |x|^{\frac{2\mu}{\nu}} = \left(x^2\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$, χ εIR και ν , μ θετικοί ακέραιοι.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ :</u> $\sqrt{x}^2 = x$ ενώ $\sqrt{x^2} = |x|$.

- Όταν κάτω από τη ρίζα υπάρχει αριθμός που είναι τέλειο τετράγωνο τότε εύκολα υπολογίζω το αποτέλεσμα. π.χ. $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{144} = 12$ κτλ. Όταν όμως ο αριθμός δεν είναι τέλειο τετράγωνο κοιτώ μήπως μπορώ να απλοποιήσω τη ρίζα γράφοντας τον αριθμό σαν γινόμενο δυο αριθμών εκ των οποίων ο ένας να είναι τέλειο τετράγωνο.

  π.χ.1 $\sqrt{8} = \sqrt{2\cdot 4} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{4} = 2\sqrt{2}$
  π.χ.2 $\sqrt{32} = \sqrt{2\cdot 16} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{16} = 4\sqrt{2}$
  π.χ.3 $\sqrt{75} = \sqrt{3\cdot 25} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{25} = 5\sqrt{3}$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει μια ρίζα, τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη ρίζα αυτή ώστε να προκύψει κλάσμα που στον παρανομαστή δεν έχει ρίζα.

  π.χ.1 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  π.χ.2 $\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει παράσταση της μορφής $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\alpha}\pm\beta$, $\alpha\pm\sqrt{\beta}$, τότε για να απαλλαγώ από τη ρίζα στον παρανομαστή πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρανομαστή.

  π.χ.1 $\frac{2}{\sqrt{5}+2} = \frac{2(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)\cdot(\sqrt{5}-2)} = \frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}^2-2^2} = \frac{2\sqrt{5}-4}{5-4} = 2\sqrt{5}-4$

π.χ.2 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{6})}{(\sqrt{5}-\sqrt{6})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{5}+\sqrt{6}^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{6}^2} = \frac{\sqrt{30}+6}{5-6} = -\left(\sqrt{30}+6\right) = -\sqrt{30}-6$

π.χ.3 $\frac{3}{2\sqrt{3}-3} = \frac{3\cdot(2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}-3)\cdot(2\sqrt{3}+3)} = \frac{6\sqrt{3}+9}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-9} = \frac{6\sqrt{3}+9}{12-9} = \frac{3\left(2\sqrt{3}+3\right)}{3} = 2\sqrt{3}+3$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3</u> Να απλοποιήσετε τις παρακάτω ρίζες :
i) $\sqrt{50}$ ii) $\sqrt{27}$ iii) $\sqrt{12}$ iv) $\sqrt{48}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4</u> Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, σε ισοδύναμα με ρητούς παρανομαστές.
i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ii) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ iv) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$ v) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ vi) $\frac{5}{3+\sqrt{2}}$ vii) $\frac{12}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

4. Η ΕΞΙΣΩΣΗ : αχ+β=0

Μια εξίσωση πρώτου βαθμού έχει τελικά τη μορφή

αχ+β=0 ή αχ=-β (1)

- Αν α$\neq$0, η (1) έχει μόνο μια λύση (ρίζα), την $x=-\frac{\beta}{\alpha}$.
  - Αν α=0 και β$\neq$0, η (1) είναι αδύνατη (δεν έχει λύση).
  - Αν α=0 και β=0, η (1) είναι ταυτότητα ή αόριστη (αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό χ).

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $3x(x-3)+(x-3)^2=4x^2-36$

<u>Λύση :</u> $3x(x-3)+(x-3)^2-4x^2+36=0 \Leftrightarrow 3x^2-9x+x^2-6x+9-4x^2+36=0 \Leftrightarrow$

$-15x+45=0 \Leftrightarrow -15x=-45 \Leftrightarrow x=\frac{-45}{-15} \Leftrightarrow x=3$

π.χ.2 Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{2(x-1)}{3}-\frac{x+1}{2}=\frac{x+7}{6}-2$

<u>Λύση :</u> Πρώτα από όλα θέλω να απαλλαγώ από τα κλάσματα. Βρίσκω $\text{ΕΚΠ}(3,2,6)=6$ και στη συνέχεια πολ/ζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να κάνω απαλοιφή παρανομαστών.

$6\frac{2(x-1)}{3}-6\frac{x+1}{2}=6\frac{x+7}{6}-2\cdot 6 \Leftrightarrow 2\cdot 2(x-1)-3(x+1)=x+7-12 \Leftrightarrow 4x-4-3x-3=x+7-12 \Leftrightarrow$

$4x-3x-x=7+3+4-12 \Leftrightarrow 0x=2$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 5</u> Να λύσετε τις εξισώσεις : i) $3x-18=0$ ii) $-3(x+2)-2(x-1)=8+x$
iii) $(2x+1)^2+5=4(x^2-10)$ iv) $(x+1)^3+x^2-1=0$

5. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad (\alpha\neq 0)$ Διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

- Αν Δ>0 τότε $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν Δ=0 τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα $x_1=x_2=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
- Αν Δ<0 τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2-3x+2=0$

Είναι $\Delta=3^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1>0$, έχει δυο πραγματικές ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\dfrac{3\pm 1}{2}=\left\langle\begin{matrix}x_1=2\\ x_2=1\end{matrix}\right.$

π.χ.2 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2+10x+25=0$

Είναι $\Delta=10^2-4\cdot 1\cdot 25=100-100=0$, έχει μια πραγματική διπλή ρίζα την $x=\dfrac{-10\pm\sqrt{0}}{2\cdot 1}=\dfrac{-10}{2}=-5$

π.χ.3 Να λύσετε την εξίσωση : $(x-3)^2+4x=-3$

$(x-3)^2+4x=-3 \Leftrightarrow x^2-6x+9+4x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+12=0$

Είναι $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 12=4-48=-44<0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

__Προσοχή :__ Όταν β=0 ή γ=0, τότε η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ μπορεί να λυθεί πιο εύκολα χωρίς τη χρήση της διακρινουσας. Πιο συγκεκριμένα :

- Αν β=0 τότε $\alpha x^2+\gamma=0$

  π.χ.1 $x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x=\pm 4$

  π.χ.2 $x^2-169=0 \Leftrightarrow x^2=169 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{169} \Leftrightarrow x=\pm 13$

  π.χ.3 $x^2-12=0 \Leftrightarrow x^2=12 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{12} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3\cdot 4} \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$

  π.χ.4 $x^2+5=0 \Leftrightarrow x^2=-5$ Αδύνατη.

- Αν γ=0 τότε $\alpha x^2+\beta x=0$

  π.χ.1 $x^2-5x=0 \Leftrightarrow x(x-5)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$

  π.χ.2 $x^2+6x=0 \Leftrightarrow x(x+6)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x+6=0 \Leftrightarrow x=-6$

__ΑΣΚΗΣΗ 6__ **Να λύσετε τις εξισώσεις :** i) $x^2-5x+6=0$ ii) $x^2-6x+9=0$ iii) $(x-2)^2+3x=2$ iv) $x^2-9x=0$ v) $x^2-9=0$ vi) $2x^2-72=0$ vii) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{1}{2}x=0$ viii) $\dfrac{(x-9)^2}{3}=27$

6. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια κλασματική εξίσωση, δηλ. εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρανομαστή, 1^{ον} παραγοντοποιώ τους παρανομαστές και βρίσκω το ΕΚΠ τους, 2^{ον} παίρνω περιορισμούς, 3^{ον} πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να γίνει απαλοιφή παρανομαστών και λύνω την εξίσωση που προκύπτει, 4^{ον} ελέγχω αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{8}{x^2-1}$

<u>Λύση :</u> $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{8}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{8}{(x-1)(x+1)}$ $\quad$ $\text{ΕΚΠ}=(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \,\&\, x\neq -1$

$(x-1)(x+1)\frac{x}{x-1}-(x-1)(x+1)\frac{2}{x+1}=(x-1)(x+1)\frac{8}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$

$x(x+1)-2(x-1)=8 \Leftrightarrow x^2+x-2x+2-8=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=3$ (δεκτή) ή $x=-2$ (δεκτή).

<u>**ΑΣΚΗΣΗ 7**</u> **Να λύσετε την εξίσωση :** $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0$

7. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 2 ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ 2 ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

- **i.** Μέθοδος αντικατάστασης
- **ii.** Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

π.χ.1 Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 3x+5y=1 \\ 2x+7y=8 \end{cases}$

<u>Λύση :</u> $\begin{cases} 3x+5y=1 \\ 2x+7y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5y=1\cdot(2) \\ 2x+7y=8\cdot(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+10y=2 \\ -6x-21y=-24 \end{cases} \Leftrightarrow$ προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $-11y=-22 \Leftrightarrow y=2$ και αντικαθιστώντας στη 1^{η} έχω : $3x+5\cdot 2=1 \Leftrightarrow 3x=-9 \Leftrightarrow x=-3$. (Μέθοδος Αντίθετων Συντελεστών)

π.χ.2 Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 2x^2+16-3xy=0 \\ x-2y=-4 \end{cases}$

<u>Λύση:</u> $\begin{cases} 2x^2+16-3xy=0 \\ x-2y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+16-3xy=0(1) \\ x=2y-4(2) \end{cases}$ η (1) λογω της (2) γίνεται :

$2(2y-4)^2+16-3(2y-4)y=0 \Leftrightarrow 2(4y^2-16y+16)+16-6y^2+12y=0 \Leftrightarrow 2y^2-20y+48=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2-10y+24=0 \Leftrightarrow y=6$ ή $y=4$. Για $y=6$ από (2) $x=8$. Για $y=4$ από (2) $x=4$. (Μέθοδος της Αντικατάστασης)

<u>**ΑΣΚΗΣΗ 8**</u> **Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα** : i) $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 8x+3y=46 \\ x+2y=9 \end{cases}$

8. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Για να λύσω μια ανίσωση της μορφής : $\alpha x+\beta>0$ ή $\alpha x+\beta<0$

Λειτουργώ όπως και στις εξισώσεις πρώτου βαθμού, δηλαδή χωρίζω γνωστούς από αγνώστους, και στη συνέχεια διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου. Αν σε κάποιο στάδιο πολλαπλασιάσω ή διαιρέσω και τα 2 μέλη με αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $-3x+18\geq 0$

<u>Λύση:</u> $-3x+18\geq 0 \Leftrightarrow -3x\geq -18 \Leftrightarrow x\leq 6$

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $2x-9>5x+6$

<u>Λύση:</u> $2x-9>5x+6 \Leftrightarrow 2x-5x>6+9 \Leftrightarrow -3x>15 \Leftrightarrow x<-5$

π.χ.3 Να λυθεί η ανίσωση : $4(3x-5)>3(4x+5)$

<u>Λύση:</u> $4(3x-5)>3(4x+5) \Leftrightarrow 12x-20>12x+15 \Leftrightarrow 12x-12x>15+20 \Leftrightarrow 0>35$ Αδύνατη

π.χ.4 Να λυθεί η ανίσωση : $1-\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)<\frac{x+4}{6}$

<u>Λύση:</u> $1-\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)<\frac{x+4}{6} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{6}<\frac{x+4}{6} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}<\frac{x+4}{6} \overset{\text{ΕΚΠ}=6}{\underset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}}$

$\Leftrightarrow 6\cdot 1-6\cdot\frac{1}{2}x-6\cdot\frac{2}{6}<6\cdot\frac{x+4}{6} \Leftrightarrow 6-3x-2<x+4 \Leftrightarrow -3x-x<4-4 \Leftrightarrow -4x<0 \Leftrightarrow x>0$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 9</u> Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $11-3x<7x+1$ ii. $2(3x-1)>15-5(2x-3)$ iii. $\frac{3-4x}{5}-\frac{3x}{10}>\frac{6-x}{2}$

9. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Η διαδικασία κατά την οποία μια παράσταση από άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων.

- **ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ**
  1. **<u>ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ</u>** **π.χ.1** $2y^2-5y=y(2y-5)$, **π.χ.2** $x(x-3)-2(3-x)=x(x-3)+2(x-3)=(x-3)(x+2)$
  2. **<u>ΚΑΤΑ ΟΜΑΔΕΣ</u>** **π.χ.2** $3x^3-12x^2+5x-20=3x^2(x-4)+5(x-4)=(x-4)(3x^2+5)$

- **ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**
  1. ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
  2. ΔΙΑΦΟΡΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
  3. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

  π.χ.1 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

  i) $16x^2-1=(4x)^2-1^2=(4x-1)(4x+1)$

  ii) $(3x-1)^2-81=(3x-1)^2-9^2=(3x-1-9)(3x-1+9)=(3x-10)(3x+8)$

- **ΤΡΙΩΝΥΜΟ**
  - αν Δ>0 όπου x_1, x_2 οι ρίζες, $\alpha x^2+\beta x+\gamma = a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$
  - αν Δ=0 όπου x_1 η διπλή ρίζα $\alpha x^2+\beta x+\gamma = a(x-x_1)^2$
  - αν Δ<0 τότε δεν παραγοντοποιείται

π.χ.1 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$
π.χ.2 $x^2+6x+9=(x+3)^2$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 10</u> Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :
i) $x^2-8x+12$ ii) $-3x^2+12x-9$

10. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Η τριγωνομετρία είναι δύο πράγματα: Οι τύποι και ο τριγωνομετρικός πίνακας.

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι και αριθμοί

1. ημ²x+συν²x = 1 ή ημ²x = 1-συν²x ή συν²x = 1-ημ²x , για κάθε $x\in\Re$
2. $-1\le \eta\mu x\le 1$, $-1\le \sigma\upsilon\nu x\le 1$, για κάθε $x\in\Re$
3. $\varepsilon\varphi x=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ για $x\in\Re$ - $\left\{\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}, \kappa: \text{ακέραιος}\right\}$
4. **Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών**

Γωνία ω	0^o	$\frac{\pi}{6}$ ή 30^o	$\frac{\pi}{4}$ ή 45^o	$\frac{\pi}{3}$ ή 60^o	$\frac{\pi}{2}$ ή 90^o
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται

5. **Αναγωγή στο 1^o τεταρτημόριο :**

ΑΠΟ 2^O ->1^O

$\eta\mu(180^\circ-x)=\eta\mu x$
$\sigma\upsilon\nu(180^\circ-x)=-\sigma\upsilon\nu x$
$\varepsilon\varphi(180^\circ-x)=-\varepsilon\varphi x$

π.χ.1 Να υπολογιστούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί :

i) $\eta\mu 120°$ ii) $\sigma\upsilon\nu 135°$ iii) $\varepsilon\phi 150°$

Λύση :

i) $\eta\mu 120° = \eta\mu(180° - 60°) = \eta\mu 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2ο -> 1ο)

ii) $\sigma\upsilon\nu 135° = \sigma\upsilon\nu(180° - 45°) = -\sigma\upsilon\nu 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2ο -> 1ο)

iii) $\varepsilon\phi 150° = \varepsilon\phi(180° - 30°) = -\varepsilon\phi 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2ο -> 1ο)

<u>ΑΣΚΗΣΗ 11</u> Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών :

i) $120°$ ii) $135°$ iii) $150°$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 12</u> Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 13</u> Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{3}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 14</u> Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\varepsilon\phi\omega = \frac{3}{4}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 15</u> Να αποδείξετε ότι :

i) $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 2$

ii) $(\alpha\eta\mu\omega + \beta\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\beta\eta\mu\omega - \alpha\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = \alpha^2 + \beta^2$

iii) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\eta\mu x} = 1 - \eta\mu x$

iv) $\varepsilon\phi x + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 16</u> Να αποδείξετε ότι :

i) $(1 - \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2(1-\eta\mu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)$

ii) $\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να λυθούν οι εξίσωσης :

   i. $5(-x+2)-4=6-5x$

   ii. $\frac{2(x-1)}{3}-\frac{x+1}{2}=\frac{x-5}{6}$

   iii. $\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+3}{5}=x-2$

   iv. $\frac{x^2}{3}-\frac{6x+1}{4}=\frac{x-2}{6}-2$

   v. $2x^2-18=0$

   vi. $(3x-1)(2x+1)=6$

   vii. $x^2+3x=0$

   viii. $2x^2-5x+4=0$

   ix. $(2x-1)^2-3(2x-1)=0$

   x. $3x^2-2(x-1)=2x+1$

   xi. $(x+2)^2+(x-1)^2=5(2x+3)$

   xii. $(2x-3)^2-(x-2)^2=2x^2-11$

   xiii. $x(8-x)-(3x+1)(x+2)=1$

2. Να λυθούν οι εξίσωσης :

   i. $\frac{4}{(x-2)^2}-\frac{3}{x-2}=1$

   ii. $\frac{6}{x(x+3)}=\frac{x+2}{x}+\frac{x+1}{x+3}$

   iii. $\frac{x+3}{x(x+1)}=\frac{x-1}{x}-\frac{2}{x+1}$

   iv. $\frac{x+5}{x^2-25}=\frac{3}{x+5}$

   v. $\frac{x+1}{x^2-x-2}-\frac{1}{x-2}=0$

   vi. $\frac{x^2+5}{x^2-x}-\frac{x+5}{x-1}=\frac{1}{x}$

   vii. $\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x-1}{x}=\frac{x}{x-2}$

   viii. $1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2-x}=0$

   ix. $\frac{2x^2}{x^2+2x}=3-\frac{4}{x+2}$

   x. $\frac{1}{x^2-4x+4}=\frac{2x-1}{x^2-4}$

   xi. $1+\frac{3x}{x-2}=\frac{x+4}{x^2-3x+2}$

3. α. $x^2-2(\lambda+2)x+2\lambda^2-17=0$ να βρεθεί το λ ώστε η εξίσωση να έχει 1 διπλή ρίζα.
β. $(\lambda+3)x^2-(2\lambda+1)x+\lambda+2=0$ να βρεθεί το λ ώστε η εξίσωση να έχει 2 ρίζες άνισες.
γ. Αν $\lambda x^2+2x-(\lambda-2)=0$ με $\lambda\neq 0$, νδο η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

4. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

i. $\begin{cases} x+y=20 \\ x+3y=44 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 3x+2y=12 \\ 5x-2y=4 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 5x+2y=6 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} 4x-3(2x+3y)=20-x+y \\ 2(x-2y)+5(x-2)=3y+4 \end{cases}$

v. $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

vi. $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$

vii. $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$

viii. $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y-x=1 \end{cases}$

ix. $\begin{cases} x+y=6 \\ x^2+y^2-2xy-4=0 \end{cases}$

x. $\begin{cases} x^2-2y=10 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

xi. $\begin{cases} (2x-3y+4)(x+y)=0 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

xii. $\begin{cases} y^2+5y-2xy=0 \\ x^2-4x+3=y \end{cases}$

xiii. $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0 \\ x+y+8=0 \end{cases}$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $\frac{2x+1}{6}-x<\frac{3-2x}{3}$

ii. $\frac{2x-3}{5}-\frac{6x-5}{15}>\frac{x-1}{3}-\frac{3}{5}$

6. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων :

i. $\begin{cases} 7x-1<8+6x \\ 3x-2>x-10 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 4x+3<9+5x \\ 1-x<2x+7 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 2x+5<\dfrac{x}{2}+2 \\ \dfrac{x-1}{2}+1>x+\dfrac{1}{3} \end{cases}$

7. Να παραγοντοποιήσετε και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις, αφού πρώτα βρείτε τις τιμές του x για τα οποίες ορίζονται.

i. $\dfrac{x^2-4}{x-2}$

ii. $\dfrac{x^2-25}{x+5}$

iii. $\dfrac{x^3-9x}{x+3}$

iv. $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9}$

v. $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}$

vi. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-6x+5}$

vii. $\dfrac{x^2-9}{x^2+x}$

viii. $\dfrac{x^3-x}{x-1}$

ix. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+1}$

x. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

xi. $\dfrac{x^3-3x^2+4x-2}{x^2-1}$

xii. $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^2-3x}$

xiii. $\dfrac{(x-2)(x-3)-(3-x)(x-7)}{x^2-9}$

xiv. $\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$

xv. $\dfrac{x^2-x+5x-5}{x^2-1}$