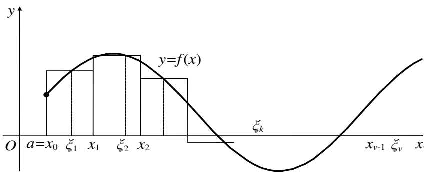
3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

63. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$

Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς στο $[\alpha,\beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα



$\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1,2,\ldots,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$ το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$.

Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ. Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή :

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

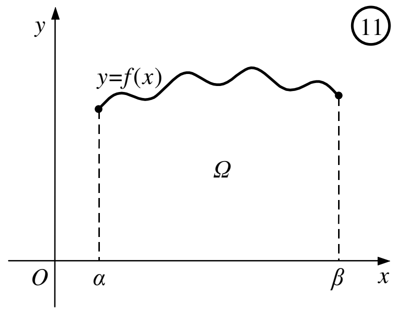
Σχόλιο :

- Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος *S* της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί *α* και *β* ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Η έννοια "όρια" εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου.

- Στην έκφραση $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το γράμμα *x* είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός.

Γεωμετρική ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος :

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $\mathrm{E}(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της *f* τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 11). Δηλαδή : $\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)$.



Επομένως,

$$\boxed{\text{Αν } f(x) \geq 0, \text{ τότε } \mathrm{E}(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0.}$$

64. Να γράψετε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Απάντηση :

α) Ισχύει ότι :

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

β) Έστω f,g **συνεχείς** συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu \in R$. Τότε ισχύουν:

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)+g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ και γενικά
- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

γ) Αν η f είναι **συνεχής** σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Για παράδειγμα, αν $\int_{0}^{3} f(x)dx = 3$ και $\int_{0}^{4} f(x)dx = 7$, τότε

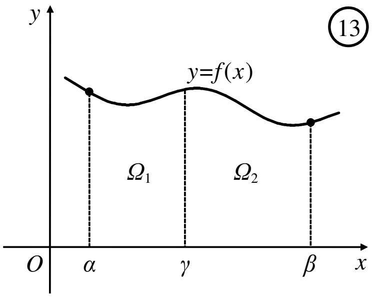
$$\int_{3}^{4} f(x)dx = \int_{3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx = -\int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx = -3+7 = 4 .$$

Σημείωση :

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι: $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$

αφού $E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$, $E(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

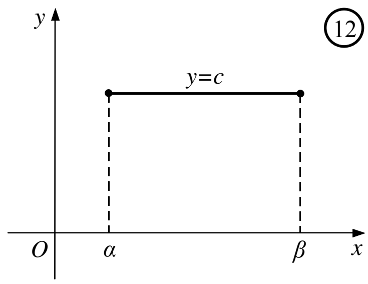
και $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.



δ) Έστω f μια **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$ ..

ε) Αν $c > 0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c (Σχ. 12).

Δηλ. $\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} c\, dx = c(\beta-\alpha)}$.



3.5 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

65. Έστω $F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad ,x\in\Delta$, όπου f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ. Ποια είναι η σχέση της F με την f ;

Απάντηση :

Η συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad ,x\in\Delta$, είναι συνεχής και είναι μια παράγουσα της f στο Δ.

66. ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδης θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού) (2002, 2008 Β΄, 2010, 2013)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι : $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$

Απόδειξη :

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\Re$ τέτοιο, ώστε : $G(x)=F(x)+c$. (1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_\alpha^\alpha f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε : $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(t)dt+G(\alpha)$ και άρα $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

67. Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Απάντηση :

α) Ισχύει ότι : $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f',g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

β) Ισχύει ότι: $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f,g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1Α : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Συμφώνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ.Θ.Ο.Λ) ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

I. $\int_{\alpha}^{\beta} 1dx = [x]_{\alpha}^{\beta}$

II. $\int_{\alpha}^{\beta} x^{\kappa} dx = \left[\frac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$

III. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{\alpha}^{\beta}$

IV. $\int_{\alpha}^{\beta} e^{x} dx = [e^{x}]_{\alpha}^{\beta}$

V. $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu x dx = [\eta\mu x]_{\alpha}^{\beta}$

VI. $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_{\alpha}^{\beta}$

VII. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{\beta}$

VIII. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = [\sqrt{x}]_{\alpha}^{\beta}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Αν $\int_{1}^{5} f(x)dx = 2$, $\int_{2}^{5} f(x)dx = 3$ και $\int_{1}^{7} f(x)dx = 5$, να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_{5}^{2} f(x)dx$

ii. $\int_{5}^{7} f(x)dx$

iii. $\int_{1}^{2} f(x)dx$

iv. $\int_{2}^{7} f(x)dx$

Λύση :

i. $\int_{5}^{2} f(x)dx = -\int_{2}^{5} f(x)dx = -3$

ii. $\int_{5}^{7} f(x)dx = \int_{5}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{7} f(x)dx = -\int_{1}^{5} f(x)dx + \int_{1}^{7} f(x)dx = -2+5=3$

iii. $\int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{1}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{2} f(x)dx = 2-3=-1$

iv. $\int_{2}^{7} f(x)dx = \int_{2}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{7} f(x)dx = 3-2+5=6$

2) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^3 (4x-3)dx$ ii. $\int_2^3 (3x^2-2x+5)dx$ iii. $\int_0^1 (2xe^x + x^2e^x)d$ iv. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}dx =$

Λύση :

i. $\int_1^3 (4x-3)dx = \left[4\frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^3 = \left[2x^2-3x\right]_1^3 = (18-9)-(2-3) = 9+1 = 10$

ii. $\int_2^3 (3x^2-2x+5)dx = \left[x^3-x^2+5x\right]_2^3 = (27-9+15)-(8-4+10) = 33-14 = 19$

iii. $\int_0^1 (2xe^x + x^2e^x)dx = \int_0^1 (x^2e^x)'dx = \left[x^2e^x\right]_0^1 = e-0 = e$

iv. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(\eta\mu x)'x - \eta\mu x(x)'}{x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)' dx = \left[\frac{\eta\mu x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0 - \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3) Αν $\int_1^3 f(x)dx = 5$, $\int_5^7 f(x)dx = 2$ και $\int_3^7 f(x)dx = 3$, να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_7^5 f(x)dx$

ii. $\int_3^5 f(x)dx$

iii. $\int_5^1 f(x)dx$

4) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 x^4dx$ ii. $\int_1^3 2x^3dx$ iii. $\int_1^2 \frac{2}{x^3}dx$ iv. $\int_2^3 \frac{1}{x^2}dx$ v. $\int_0^2 3\sqrt{x}dx$ vi. $\int_1^2 \sqrt[3]{x}dx$ vii. $\int_1^8 \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx$

viii. $\int_0^1 \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}}dx$ ix. $\int_1^2 (4x-1)dx$ x. $\int_0^{\pi} (2e^x + \eta\mu x)dx$ xi. $\int_1^e (2x\ln x + x)dx$ xii. $\int_0^1 (x-e^x)dx$

5) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 (3x^2+2x+1)dx$ ii. $\int_1^2 (t+1)dt$ iii. $\int_0^2 (x^2+x+2)dx$ iv. $\int_0^{\pi} (2x\sigma\upsilon\nu x - x^2\eta\mu x)dx$

v. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x + 2\eta\mu x)dx$ vi. $\int_1^2 \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2}dx$ vii. $\int_1^4 \frac{2x^2-2x-3}{x}dx$ viii. $\int_0^2 (xe^x + e^x)dx$

ix. $\int_0^1 (2xe^x + x^2e^x)dx$ x. $\int_1^4 (2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}})dx$ xi. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}dx$

1Β. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε να ισχύει : $\int_{\alpha}^{3}(3x^2-\alpha x)dx=14$.

Λύση :

$$\int_{\alpha}^{3}(3x^2-\alpha x)dx=14 \Leftrightarrow \left[x^3-\alpha\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{3}=14 \Leftrightarrow 27-\alpha\frac{9}{2}-\left(\alpha^3-\alpha\frac{\alpha^2}{2}\right)=14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 27-\frac{9\alpha}{2}-\alpha^3+\frac{\alpha^3}{2}=14 \Leftrightarrow 54-9\alpha-2\alpha^3+\alpha^3=28 \Leftrightarrow \alpha^3+9\alpha-26=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+13)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-2=0 \Leftrightarrow \alpha=2 \\ \qquad ή \\ \alpha^2+2\alpha+13=0 \quad αδύνατη \end{cases}$$

. Άρα $\alpha=2$.

7) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re^*$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0)=\frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε την παράσταση : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ημx}{f(x)}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{συνx\cdot f'(x)}{f^2(x)}dx$.

Λύση :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ημx}{f(x)}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{συνx\cdot f'(x)}{f^2(x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{ημx}{f(x)}+\frac{συνx\cdot f'(x)}{f^2(x)}\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{ημx\cdot f(x)+συνx\cdot f'(x)}{f^2(x)}\right)dx==\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(-συνx)'\cdot f(x)+συνx\cdot f'(x)}{f^2(x)}\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{(συνx)'\cdot f(x)-συνx\cdot f'(x)}{f^2(x)}\right)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{συνx}{f(x)}\right)'dx=-\left[\frac{συνx}{f(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{συν\frac{\pi}{2}}{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{συν0}{f(0)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, ώστε να ισχύει : $\int_2^{\kappa}\frac{3x^2-1}{x^2+4}dx-\int_{\kappa}^{2}\frac{9-x^2}{x^2+4}dx=12$

9) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, ώστε να ισχύει : $\int_1^3\frac{e^x+x^3-x}{x^2+1}dx=\int_{-3}^{1}\kappa dx+\int_3^1\frac{x^3+3x-e^x}{x^2+1}dx$

10) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε να ισχύει : $\int_{-1}^{\alpha}(\alpha x+3)dx=12$

11)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$, για την οποία ισχύει $\int_{-1}^{1}f(x)dx=12$, ενώ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(1,f(1))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=2x+2$. Να βρείτε τα α,β,γ.

12)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει : $f(1)=5$ και $\int_1^2(xf'(x)+f(x))dx=1$. Να βρείτε :

i. την τιμή $f(2)$

ii. το ολοκλήρωμα $\int_1^2 x^2(3f(x)+xf'(x))dx$

13)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει : $f'(1)+f(1)=0$ και $\int_0^1\frac{f''(x)-f(x)}{e^x}dx=2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(0,-5)$.

1Γ. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΜΕΣΑ ΣΕ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Θα πρέπει να θυμόμαστε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

14)Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_1^2 f(t)\sigma\upsilon\nu x dt\right)dx=2$.

Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 f(t)dt$

ii. $\int_{-2}^{0}\left(\int_1^2 3t^2 f(x)dx\right)dt$

Λύση :

i. Έχω $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_1^2 f(t)\sigma\upsilon\nu x dt\right)dx=2\Leftrightarrow\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sigma\upsilon\nu x\left(\int_1^2 f(t)dt\right)dx=2$ (1)

Έστω $\int_1^2 f(t)dt=\lambda\in\Re$ τότε : Η (1) γίνεται : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sigma\upsilon\nu x\left(\int_1^2 f(t)dt\right)dx=2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\lambda\sigma\upsilon\nu x dx=2\Leftrightarrow[\lambda\eta\mu x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2\Leftrightarrow\lambda\eta\mu\pi-\lambda\eta\mu\frac{\pi}{2}=2\Leftrightarrow-\lambda=2\Leftrightarrow\lambda=-2$$

Δηλ. $\int_1^2 f(t)dt=-2$.

ii. $\int_{-2}^{0}\left(\int_1^2 3t^2 f(x)dx\right)dt=\int_{-2}^{0}3t^2\left(\int_1^2 f(x)dx\right)dt\overset{i.}{=}\int_{-2}^{0}3t^2\cdot(-2)dt=-\int_{-2}^{0}6t^2dt=\left[-2t^3\right]_{-2}^{0}=-16$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

15)Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \Re \to \Re$.

i. Αν ισχύει ότι : $\int_1^2 t^2\left(\int_1^2 f(x)dx\right)dt = 14$, τότε να βρείτε το $\int_1^2 f(x)dx$

ii. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\int_0^3 g(x)dx = 2$, τότε να βρείτε το : $\int_0^3\left(\int_1^2 f(t)g(x)dt\right)dx$

16)Αν ισχύει ότι $\int_4^5 f(x)dx = 4$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_1^3\left(\int_4^5 xf(t)dt\right)dx$

17)Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : $I_1 = \int_1^2\left(\int_3^x 4dt\right)dx$ και $I_2 = \int_{-1}^2\left(\int_1^x 6t^2dt\right)dx$.

18)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x)f(y)dy\right)dx - 6\int_0^1 f(x)dx = -9$. Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 f(x)dx$

ii. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^1 f(t)\sigma\upsilon\nu 3xdt\right)dx$

1Δ. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θα πρέπει να θυμόμαστε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

19) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\Re$ για την οποία ισχύει $f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$. Να αποδείξετε ότι f(x)=20x^3+6x−45 . (4^o 2008)

Λύση : Έστω $\int_0^2 f(t)dt = \lambda \in \Re$, τότε $f(x) = (10x^3 + 3x)\lambda - 45$

Άρα $\int_0^2 f(x)dx = \lambda \Leftrightarrow \int_0^2[(10x^3 + 3x)\lambda - 45]dx = \lambda \Leftrightarrow \lambda\left[\frac{5x^4}{2} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^2 - 45[x]_0^2 = \lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 46\lambda - 90 = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$. Άρα $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

20) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f(x) = 12x^2 - 2x\int_0^1 f(t)dt$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

21) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f(x) = 9x^2 - \int_{-1}^1 2xf(t)dt$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

1Ε. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

Όταν έχουμε μια συνάρτηση της μορφής : $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \alpha\nu\ x\le x_0 \\ f_2(x), & \alpha\nu\ x>x_0 \end{cases}$ τότε για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ με $\alpha<x_0<\beta$, εργαζόμαστε ως εξής :

Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο x_0, καθώς για να έχει νόημα το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, πρέπει η f να είναι συνεχής στο [α,β] άρα και στο x_0. Στη συνέχεια έχουμε :

$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^{x_0} f_1(x)dx+\int_{x_0}^\beta f_2(x)dx=...$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & \alpha\nu\ x\le 0 \\ \eta\mu x, & \alpha\nu\ x>0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Λύση :
Για $x<0$ η $f(x)=x$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική,
Για $x>0$ η $f(x)=\eta\mu x$ είναι συνεχής ως τριγωνομετρική,
Στο $x_0=0$ είναι : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x=0$ και $f(0)=0$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ επομένως η f είναι συνεχής για κάθε $x\in\Re$ άρα και στο [-π,π].

Έτσι : $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0} xdx+\int_{0}^{\pi}\eta\mu xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi=$

$=-\frac{\pi^2}{2}+1+1=2-\frac{\pi^2}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 3x^2+1, & \alpha\nu\ x\le 0 \\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & \alpha\nu\ x>0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$.

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & \alpha\nu\ x\le 1 \\ 3x^2-6x+8, & \alpha\nu\ x>1 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$.

1ΣΤ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Συνήθως συναντάμε τη μορφή $\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$. Αρχικά λύνω την εξίσωση $f(x)=0$, βρίσκουμε το πρόσημο της f (με πινακάκι), βγάζουμε την απόλυτη τιμή, αν είναι απαραίτητο χωρίζουμε το [α,β], και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

25)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^2 (x^2-|x-1|)dx$

Λύση :

$\int_0^2 (x^2-|x-1|)dx$

Έχω : $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+

Άρα : έστω $f(x)=x^2-|x-1| \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+x-1, & x<1 \\ x^2-x+1, & x\geq 1 \end{cases}$

Δεν χρειάζεται να εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής, καθώς από την αρχική της μορφή η $f(x)=x^2-|x-1|$, είναι συνεχής ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Άρα : $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 (x^2+x-1)dx+\int_1^2 (x^2-x+1)dx=$

$$\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+\left(\frac{8}{3}-2+2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

26) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^{10}|x+1|dx$ ii. $\int_{-2}^2|3x^2-3|dx$ ii. $\int_1^4|3x-x^2|dx$ iv. $\int_1^3|\ln x|dx$ v. $\int_0^3|x^2-3x+2|dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

I. $\int_\alpha^\beta e^{f(x)} f'(x)dx = \left[e^{f(x)}\right]_\alpha^\beta$

II. $\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \left[2\sqrt{f(x)}\right]_\alpha^\beta$

III. $\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left[\ln\left(f(x)\right)\right]_\alpha^\beta$

IV. $\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \left[-\frac{1}{f(x)}\right]_\alpha^\beta$

V. $\int_\alpha^\beta f^\kappa(x) f'(x)dx = \left[\frac{\left(f(x)\right)^{\kappa+1}}{\kappa+1}\right]_\alpha^\beta$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Αν το ολοκλήρωμα μας θυμίζει κάποια από τις παραπάνω μορφές ολοκληρωμάτων σύνθετων συναρτήσεων, τότε εφαρμόζουμε απευθείας τον αντίστοιχο τύπο. Συνήθως όμως οι συναρτήσεις μοιάζουν πολύ αλλά δεν είναι ίδιες. Τότε φτιάχνουμε την $f'(x)$ με κάποια απλή πράξη (π.χ. πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με ένα αριθμό) ώστε να αναχθούμε σε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 3x^2 e^{x^3+5}dx$ ii. $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$ iii. $\int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+5x+1}dx$

iv. $\int_1^2 \frac{2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2}dx$ v. $\int_0^3 (2x-3)\left(x^2-3x\right)^5 dx$

Λύση :

i. $\int_0^1 3x^2 e^{x^3+5}dx = \int_0^1 (x^3+5)' e^{x^3+5}dx = \int_0^1 \left(e^{x^3+5}\right)' dx = \left[e^{x^3+5}\right]_0^1 = e^6 - e^5$

ii. $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx = \int_0^1 \frac{(x^3+1)'}{\sqrt{x^3+1}}dx = \int_0^1 (2\sqrt{x^3+1})' dx = \left[2\sqrt{x^3+1}\right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$

iii. $\int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+5x+1}dx = \int_0^1 \frac{(x^2+5x+1)'}{x^2+5x+1}dx = \int_0^1 \left(\ln(x^2+5x+1)\right)' dx = \left[\ln(x^2+5x+1)\right]_0^1 = \ln 7$

iv. $\int_1^2 \frac{2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2}dx = \int_1^2 \frac{(x^2+2x)'}{\left(x^2+2x\right)^2}dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2+2x}\right)' dx = \left[-\frac{1}{x^2+2x}\right]_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$

v. $\int_0^3 (2x-3)\left(x^2-3x\right)^5 dx = \int_0^3 (x^2-3x)'\left(x^2-3x\right)^5 dx = \int_0^3 \left(\frac{(x^2-3x)^6}{6}\right)' dx = \left[\frac{(x^2-3x)^6}{6}\right]_0^3 = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

28)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 2xe^{x^2+1}dx$ ii. $\int_0^2 x^2e^{x^3+1}dx$ iii. $\int_0^1 2e^{2x}dx$ iv. $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ v. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x+2}dx$

vi. $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}dx$ vii. $\int_0^1 \frac{4}{2x+1}dx$ viii. $\int_1^3 \frac{1}{3x-2}dx$ ix. $\int_2^3 \frac{2}{(x+1)^2}dx$ x. $\int_1^2 \frac{4}{(2x+1)^2}dx$

xi. $\int_{-1}^0 (x+1)^9 dx$ xii. $\int_0^3 (x-1)^5 dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3Α : ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx}$$

όπου $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι συνεχής συναρτήσεις στο [α,β]

Για να εφαρμόσουμε παραγοντική ολοκλήρωση, πρέπει το ολοκλήρωμα να έχει τη μορφή $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$ ή να το φέρουμε εμείς στη μορφή αυτή (η προς ολοκλήρωση συνάρτηση να μπορεί να πάρει τη μορφή γινομένου δυο συναρτήσεων) και στη συνέχεια η μια από τις δυο συναρτήσεις να γραφεί με τη μορφή παραγώγου. Ουσιαστικά χρειαζόμαστε την παράγουσα μιας εκ των δυο συναρτήσεων ώστε το ολοκλήρωμα να πάρει την επιθυμητή μορφή. Με παραγοντική ολοκλήρωση υπολογίζονται ολοκληρώματα της μορφής :

1η Περίπτωση : $\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)e^{\kappa x+\lambda}dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $e^{\kappa x+\lambda}$

2η Περίπτωση : $\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)\eta\mu(\alpha x)dx$, $\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)\sigma\upsilon\nu(\alpha x)dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $\eta\mu x$ και της $\sigma\upsilon\nu x$ αντίστοιχα.

3η Περίπτωση : $\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)\ln(\alpha x)dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $\mathrm{P}(x)$

4η Περίπτωση : $\int_\alpha^\beta e^{\alpha x}\eta\mu(\beta x)dx$, $\int_\alpha^\beta e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu(\beta x)dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $e^{\kappa x+\lambda}$. Σε αυτή την περίπτωση εμφανίζεται η ιδιομορφία ότι κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος εμφανίζεται σε κάποιο στάδιο ξανά το αρχικό ολοκλήρωμα. Έτσι θέτουμε το αρχικό ολοκλήρωμα με ένα γράμμα π.χ. Ι και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς Ι.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

29)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 xe^x dx$ ii. $\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}dx$

Λύση :

i. $\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)'dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 (x)'e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e-(e-1)=1$

ii. $\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}dx = \int_0^1 x^2e^{-x}dx = -\int_0^1 x^2(e^{-x})'dx = -\left[x^2e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (x^2)'e^{-x}dx =$

$= -(e^{-1}) + \int_0^1 2xe^{-x}dx = -\frac{1}{e} - \int_0^1 2x(e^{-x})'dx = -\frac{1}{e} - \left[2xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (2x)'e^{-x}dx =$

$= -\frac{1}{e} - (2e^{-1}) + \int_0^1 2e^{-x}dx = -\frac{3}{e} - \left[2e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{3}{e} - (2e^{-1}-2) = 2-\frac{5}{e}$

30)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^\pi 2x\eta\mu 2x dx$

Λύση : $\int_0^\pi 2x\eta\mu 2xdx = \int_0^\pi 2x\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)' dx = \left[-2x\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2x)'\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)dx =$

$= \left[-x\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)dx = (-\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi) + \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu 2xdx = -\pi + \left[\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_0^\pi =$

$= -\pi + \frac{\eta\mu 2\pi}{2} - \frac{\eta\mu 0}{2} = -\pi$

31)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 (3x^2+1)\ln xdx$ ii. $\int_1^e \ln xdx$

Λύση :

i. $\int_1^2 (3x^2+1)\ln xdx = \int_1^2 (x^3+x)'\ln xdx = \left[(x^3+x)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 (x^3+x)(\ln x)'dx =$

$= 10\ln 2 - \int_1^2 (x^3+x)\frac{1}{x}dx = 10\ln 2 - \int_1^2 (x^2+1)dx = 10\ln 2 - \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^2 = 10\ln 2 - \left(\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}-1\right) =$

$= 10\ln 2 - \frac{10}{3}$

ii. $\int_1^e \ln xdx = \int_1^e (x)'\ln xdx = \left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'dx = e\ln e - 1\ln 1 - \int_1^e x\frac{1}{x}dx = e - \int_1^e 1dx =$

$e - \left[x\right]_1^e = e-e+1 = 1$

32)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^\pi e^x\eta\mu xdx$

Λύση : Έχω : $I = \int_0^\pi e^x\eta\mu xdx = \int_0^\pi (e^x)'\eta\mu xdx = \left[e^x\eta\mu x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x(\eta\mu x)'dx =$

$= e^\pi\eta\mu\pi - e^0\eta\mu 0 - \int_0^\pi e^x\sigma\upsilon\nu xdx = -\int_0^\pi (e^x)'\sigma\upsilon\nu xdx = -\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx =$

$-(e^\pi\sigma\upsilon\nu\pi - e^0\sigma\upsilon\nu 0) + \int_0^\pi e^x(-\eta\mu x)dx = -(-e^\pi-1) - \int_0^\pi e^x\eta\mu xdx = e^\pi+1-I$

Άρα : $I = e^\pi+1-I \Leftrightarrow 2I = e^\pi+1 \Leftrightarrow I = \frac{e^\pi+1}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

33)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 2xe^x dx$ ii. $\int_0^1 (2x+1)e^x dx$ iii. $\int_0^1 3xe^x dx$ iv. $\int_1^2 (x+1)e^x dx$ v. $\int_0^2 (1-3x)e^x dx$

vi. $\int_0^1 x^2 e^x dx$ vii. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ viii. $\int_0^1 (3x^2-2x+1)e^{2x} dx$

34)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x dx$ β. $\int_0^{\pi} x^2 \sigma\upsilon\nu x dx$ γ. $\int_0^{\pi} x\eta\mu 2x dx$ iv. $\int_0^{\pi} 2x^2 \eta\mu 2x dx$

35)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α. $\int_1^2 x\ln x dx$ β. $\int_1^2 x\ln 2x dx$ γ. $\int_1^2 2x^2 \ln x dx$ δ. $\int_1^2 (3x^2-4x)\ln x dx$

36)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma\upsilon\nu x dx$ β. $\int_0^{\pi} e^{2x} \sigma\upsilon\nu x dx$ γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \eta\mu 2x dx$ δ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx$

3Β. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

37)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει : $\int_0^{\pi} (f(x)+f''(x))\eta\mu x dx = 2$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(\pi, f(\pi))$ έχει εξίσωση : $2x-\pi y-\pi=0$. Να βρείτε :

i. τις τιμές $f(\pi), f'(\pi)$ και $f(0)$

ii. το ολοκλήρωμα : $\int_0^{\pi} xf''(x)dx$

Λύση :

i. Η ευθεία $(\varepsilon): 2x-\pi y-\pi=0 \Leftrightarrow (\varepsilon): y=\frac{2}{\pi}x-1$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(\pi, f(\pi))$ αν : $\begin{cases} f'(\pi)=\frac{2}{\pi} \\ f(\pi)=\frac{2}{\pi}\pi-1 \Leftrightarrow f(\pi)=1 \end{cases}$

Επίσης :

1ος τρόπος : $\int_0^{\pi} (f(x)+f''(x))\eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} (f(x)\eta\mu x + f''(x)\eta\mu x)dx = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + \int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + \int_0^{\pi} (f'(x))' \eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)(\eta\mu x)' dx = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + 0 - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx - [f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x)(\sigma\upsilon\nu x)' dx = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx - f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0 - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + f(0) = 2 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

2ος τρόπος :

$$\int_0^{\pi}\left(f(x) + f''(x)\right)\eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^{\pi}\left(f(x)\eta\mu x + f''(x)\eta\mu x\right)dx = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)' dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)(\eta\mu x)' dx = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [-f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)(-\sigma\upsilon\nu x)dx + [f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\eta\mu 0] - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(-f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0\right) + \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + f(0) = 2 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

ii. $\int_0^{\pi} xf''(x)dx = [xf'(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(x)'f'(x)dx = \pi f'(\pi) - 0 - \int_0^{\pi} f'(x)dx = \pi\frac{2}{\pi} - [f(x)]_0^{\pi} =$
$= 2 - f(\pi) + f(0) = 2 - 1 + 1 = 2.$

38)Έστω F μια παράγουσα στο $\Re$ της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, με $F(1) = 0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\mathrm{I} = \int_0^1 F(x)dx$. ***(Ολοκλήρωμα Παράγουσας F)***

Λύση :

Είναι : $F'(x) = f(x)$, $x \in \Re$.

Έχουμε : $\mathrm{I} = \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 (x)'F(x)dx = [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 xF'(x)dx = F(1) - \int_0^1 xf(x)dx =$

$$= 0 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = -\int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = -\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}dx = -\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = -\left(\sqrt{2}-1\right) = 1 - \sqrt{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

39)Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(1) = 5$ και $\int_0^1 f(x)dx = 2$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\mathrm{I} = \int_0^1 xf'(x)dx$

40) Έστω οι συναρτήσεις f, g, με f'', g'' συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ και $f'(\beta) = g'(\beta)$, να αποδείξετε ότι :

$$\mathrm{I} = \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)g''(x) - f''(x)g(x))dx = g'(\beta)(f(\beta) - g(\beta)).$$

41) Έστω F μια παράγουσα στο $\Re$ της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$, με $F(1) = 0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\mathrm{I} = \int_0^1 F(x)dx$.

42)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία της Α(1,2) και Β(3,9) τέμνονται στο σημείο Γ(4,11). Να βρείτε :

i. τις τιμές $f'(1), f'(3)$ ii. το ολοκλήρωμα : $\int_1^3 xf''(x)dx$

43)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει : $\int_1^3\int_0^2 xf(t)dtdx = 12$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(2, f(2))$ έχει εξίσωση : $2x-y-3=0$. Να υπολογίσετε :

i. τις τιμές $f(2), f'(2)$ ii. το $\int_0^2 f(x)dx$ iii. το $\int_0^2 x^2 f''(x)dx$

44)Δίνεται το ολοκλήρωμα : $\mathrm{I}(\lambda)=\int_\lambda^1 \ln x^3 dx$ με λ>0

i. Να υπολογίσετε το $\mathrm{I}(\lambda)$ ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\mathrm{I}(\lambda)$.

45)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

46)Δίνεται το ολοκλήρωμα : $\mathrm{I}(\lambda)=\int_1^\lambda\left(\frac{x}{e^x}-\frac{\ln x}{x^2}\right)dx$ με λ>1

i. Να υπολογίσετε το $\mathrm{I}(\lambda)$ ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{I}(\lambda)$.

3Γ. ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

47)Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}_\nu=\int_0^1 x^\nu\cdot e^x dx$, με $\nu\in N^*$.

i. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{I}_\nu = e-\nu\cdot\mathrm{I}_{\nu-1}$ για κάθε $\nu\geq 2$.

ii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_0^1 xe^x dx$ και $\int_0^1 x^4e^x dx$

48)Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}_\nu=\int_0^\pi x^\nu\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$, με $\nu\in N^*$.

i. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{I}_\nu=-\nu\pi^{\nu-1}-\nu(\nu-1)\mathrm{I}_{\nu-2}$ για κάθε $\nu\geq 4$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi x^5\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$

49) Αν $I_\nu=\int_0^1\frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2}dt$, $\nu\in\mathrm{N}$,

i) Να υπολογίσετε το άθροισμα $I_\nu+\mathrm{I}_{\nu+1}$, $\nu\in\mathrm{N}$

ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_0, I_1, I_2.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ $I=\int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

- **1ηπεριπτωση** : Αν $P(x)=\mu Q'(x)$ τότε : $I=\mu\left[\ln|Q(x)|\right]_\alpha^\beta$
- **2ηπεριπτωση** : Αν $B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ P(x) < B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ Q(x)$ τότε :
  - ✓ Αν $B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ P(x)=0 \quad \kappa\alpha\iota \quad B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ Q(x)=1$ έχουμε : $I=\int_\alpha^\beta \frac{\mu}{\alpha x+\beta}dx=\frac{\mu}{\alpha}$ $\left[\ln|\alpha x+\beta|\right]_\alpha^\beta$
  - ✓ Αν $B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ P(x)=1 \quad \kappa\alpha\iota \quad B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ Q(x)=2$ με $Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και $\alpha\neq 0$, $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ τότε : $I=\int_\alpha^\beta \frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx=\int_\alpha^\beta \frac{\kappa x+\lambda}{(\alpha_1 x-x_1)(\alpha_2 x-x_2)}dx$ $=\int_\alpha^\beta \frac{A}{(\alpha_1 x-x_1)}dx+\int_\alpha^\beta \frac{B}{(\alpha_2 x-x_2)}dx$
- **3ηπεριπτωση** : Αν $B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ P(x)\geq B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ Q(x)$ τότε εκτελούμε την ευκλείδεια **διαίρεση** $P(x):Q(x)$ και έτσι έχουμε : $P(x)=Q(x)\cdot\Pi(x)+\upsilon(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

50)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx$ ii. $\int_0^1 \frac{5}{3x+2}dx$ iiii. $\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$ iv. $\int_4^5 \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx$

Λύση :

i. $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx=\int_0^1 \frac{(x^2+x+3)'}{x^2+x+3}dx=\left[\ln|x^2+x+3|\right]_0^1=\ln 5-\ln 3=\ln\frac{5}{3}$

ii. $\int_0^1 \frac{5}{3x+2}dx=5\int_0^1 \frac{1}{3x+2}dx=\frac{5}{3}\int_0^1 \frac{(3x+2)'}{3x+2}dx=\frac{5}{3}\left[\ln|3x+2|\right]_0^1=\frac{5}{3}(\ln 5-\ln 2)=\frac{5}{3}\ln\frac{5}{2}$

iii. $\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$

Έχω $\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\Leftrightarrow 2x+1=A(x-3)+B(x-2)\Leftrightarrow$

$2x+1=Ax-3A+Bx-2B\Leftrightarrow 2x+1=(A+B)x-3A-2B\Leftrightarrow \begin{cases}A+B=2\\-3A-2B=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}3A+3B=6\\-3A-2B=1\end{cases}$

άρα $B=7$ και $A+7=2\Leftrightarrow A=-5$

Άρα $\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx=\int_4^5 \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}dx=$

$\int_4^5\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{7}{x-3}\right)dx=-5\left[\ln|x-2|\right]_4^5+7\left[\ln|x-3|\right]_4^5=$

$-5(\ln 3-\ln 2)+7(\ln 2-\ln 1)=-5\ln 3+5\ln 2+7\ln 2=12\ln 2-5\ln 3$

iv. $\int_4^5 \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx$

Εκτελούμε τη διαίρεση : $(x^2-3x+7):(x^2-5x+6)$ και έχω : $x^2-3x+7=1\cdot(x^2-5x+6)+2x+1$.

Έτσι : $\int_4^5 \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx=\int_4^5 \frac{1\cdot(x^2-5x+6)+2x+1}{x^2-5x+6}dx=\int_4^5 \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+6}dx+\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx=$

$=\int_4^5 1dx+\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx\overset{i.}{=}[x]_4^5+12\ln 2-5\ln 3=1+12\ln 2-5\ln 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

51)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}dx$ ii. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$ iii. $\int_2^3 \frac{2}{x-1}dx$ iv. $\int_1^2 \frac{4}{5x+1}dx$

52)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_3^4 \frac{3x+2}{x^2-3x+2}dx$ ii. $\int_{-1}^0 \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$ iii. $\int_4^5 \frac{2}{x^2-1}dx$ iv. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

53) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx$ ii. $\int_3^4 \frac{x^2-2x+2}{x^2-3x+2}dx$ iii. $\int_1^4 \frac{x}{x+2}dx$ iv. $\int_0^1 \frac{2x}{3x+1}dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5Α : ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

$\int_\alpha^\beta f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$ όπου $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι συνεχής συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\int_\alpha^\beta f\big(g(x)\big)g'(x)dx$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ :

- Αν $\mathrm{I} = \int_\kappa^\lambda (\alpha x+\beta)^\nu \cdot (\gamma x+\delta)^\mu dx$, $\nu \ge \mu$, θέτουμε $u = \alpha x + \beta$
- Αν $\mathrm{I} = \int_\kappa^\lambda f\big(x, \sqrt[\nu]{g(x)}\big)dx$, θέτουμε $u = \sqrt[\nu]{g(x)}$
- Αν $\mathrm{I} = \int_\kappa^\lambda f\big(x, \sqrt[\nu_1]{\alpha x+\beta}, \sqrt[\nu_2]{\alpha x+\beta})\big)dx$, θέτουμε $u = \sqrt[\nu]{\alpha x+\beta}$ οπού $\nu = \text{ΕΚΠ}(\nu_1, \nu_2)$
- Αν $\mathrm{I} = \int_\kappa^\lambda f\big(e^{ax}\big)dx$ θέτουμε $u = e^{ax}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

54)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_{-2}^{-1}(x-1)(x+2)^4 dx$ ii. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ iii. $\int_1^{64} \frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$ iv. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}-2}{e^x+1}dx$

Λύση :

i. $\int_{-2}^{-1}(x-1)(x+2)^4 dx$ θέτω $u = x+2$ άρα $du = dx$

Για $x=-2$ είναι $u=0$

Για $x=-1$ είναι $u=1$

Άρα : $\int_{-2}^{-1}(x-1)(x+2)^4 dx = \int_0^1 (x-1)u^4 du \overset{u=x+2 \Leftrightarrow x=u-2}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \int_0^1 (u-2-1)u^4 du = \int_0^1 (u^5 - 3u^4)du =$

$= \left[\frac{u^6}{6} - 3\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = -\frac{13}{30}$

ii. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ θέτω $u = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow u^2 = x+1$ άρα $2udu = dx$

Για $x=0$ είναι $u^2 = 1 \Leftrightarrow u = 1$ ($u = \sqrt{x+1}$ άρα $u \ge 0$)

Για $x=3$ είναι $u^2 = 4 \Leftrightarrow u = 2$

Άρα : $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_1^2 \frac{x}{u}2udu = \int_1^2 2xdu \overset{u^2=x+1 \Leftrightarrow x=u^2-1}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \int_1^2 2(u^2-1)du = 2\left[\frac{u^3}{3} - u\right]_1^2 = \frac{8}{3}$.

iii. $\int_1^{64} \frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$ θέτω $u = \sqrt[6]{x}$ άρα $u^3 = \sqrt{x}$, $u^2 = \sqrt[3]{x}$ και $u^6 = x$ άρα $6u^5 du = dx$

Για $x=1$ είναι $u=1$

Για $x=64$ είναι $u=2$

Άρα : $\int_1^{64}\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2\frac{u^6+u^2}{u^3}6u^5du=\int_1^2 6u^2(u^6+u^2)du=\int_1^2(6u^8+6u^4)du=$

$=6\left[\frac{u^9}{9}+\frac{u^5}{5}\right]_1^2=\frac{5668}{12}$

iv. $\int_0^{\ln 3}\frac{e^{2x}-2}{e^x+1}dx$ θέτω $u=e^x$ άρα $du=e^xdx\Leftrightarrow dx=\frac{du}{e^x}$

Για $x=0$ είναι $u=1$

Για $x=\ln 3$ είναι $u=e^{\ln 3}=3$

Άρα : $\int_0^{\ln 3}\frac{e^{2x}-2}{e^x+1}dx=\int_1^3\frac{u^2-2}{u+1}\frac{du}{e^x}=\int_1^3\frac{u^2-2}{u+1}\frac{du}{u}=\int_1^3\frac{u^2-2}{u^2+u}du$

Εκτελώ τη διαίρεση : $(u^2-2):(u^2+u)$ και εχω : $u^2-2=1(u^2+u)-u-2$

Άρα : $I=\int_1^3\frac{u^2-2}{u^2+u}du=\int_1^3\frac{u^2+u-u-2}{u^2+u}du=\int_1^3\frac{u^2+u}{u^2+u}du-\int_1^3\frac{u+2}{u^2+u}du=$

$\int_1^3 1du-\int_1^3\frac{u+2}{u^2+u}du=$

$=[u]_1^3-\int_1^3\frac{u+2}{u^2+u}du==2-\int_1^3\frac{u+2}{u^2+u}du$

Για το ολοκλήρωμα $I_2=\int_1^3\frac{u+2}{u^2+u}du$ έχω :

$\frac{u+2}{u(u+1)}=\frac{\mathrm{A}}{u}+\frac{\mathrm{B}}{u+1}\Leftrightarrow u+2=\mathrm{A}(u+1)+\mathrm{B}u\Leftrightarrow u+2=(\mathrm{A}+\mathrm{B})u+\mathrm{A}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=1\\ \mathrm{A}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{A}=2\\ \mathrm{B}=-1\end{cases}$

Άρα : $I_2=\int_1^3\frac{u+2}{u^2+u}du\int_1^3\frac{u+2}{u(u+1)}du=\int_1^3\left(\frac{2}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du=\left[2\ln|u|\right]_1^3-\left[\ln|u+1|\right]_1^3=$

$=2\ln 3-\ln 4+\ln 2=\ln 9+\ln 2-\ln 4=\ln\frac{9}{2}$

Τελικά : $I=2-I_2=2-\ln\frac{9}{2}$.

55)**(Συνδυαστικό παραγοντικής – αλλαγής μεταβλητής)**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx$.

<u>Λύση :</u>

$\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx$ θέτω $u=9+x^2$ άρα $du=2xdx\Leftrightarrow dx=\frac{du}{2x}$

Για $x=0$ είναι $u=9$

Για $x=1$ είναι $u=10$ άρα έχω : $\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx=\int_9^{10}x\ln u\frac{du}{2x}=\frac{1}{2}\int_9^{10}\ln udu=$

$\frac{1}{2}\int_9^{10}(u)'\ln udu=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_9^{10}-\frac{1}{2}\int_9^{10}u(\ln u)'du=\frac{1}{2}(10\ln 10-9\ln 9)-\frac{1}{2}\int_9^{10}1du=$

$=\frac{1}{2}(10\ln 10-9\ln 9)-\frac{1}{2}[u]_9^{10}==\frac{1}{2}(10\ln 10-9\ln 9)-\frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

56)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx$ ii. $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$ iii. $\int_0^1 (x+2)(x-1)^5 dx$ iv. $\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu 3x dx$

v. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$ vi. $\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ vii. $\int_{-1}^2 xe^{x^2+1}dx$ viii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)dx$

57)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx$ ii. $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ iii. $\int_0^\pi \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx$ iv. $\int_0^1 x(x^2-1)^{99}dx$

v. $\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$ vi. $\int_0^1 \frac{x^2-2}{(x^3-6x+1)^2}dx$ vii. $\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$ viii. $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}dx$

58) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}dx$ ii. $\int_0^1 e^{2x}\sigma\upsilon\nu e^x dx$ iii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x}dx$ iv. $\int_0^\pi \frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu^2 x+1}dx$

v. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ vi. $\int_0^1 2x(x^2+1)^2 dx$ vii. $\int_1^2 x(x-1)^4 dx$ viii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu x+1}dx$ ix. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu 4x dx$

x. $\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx$ xi. $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ xii. $\int_1^{e^\pi} \frac{\eta\mu(\ln x)}{x}dx$ xiii. $\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

59) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ ii. $\int_0^{\pi/2} [\text{ημ}(\text{συν}x+x)\text{ημ}x - \text{ημ}(\text{συν}x+x)]dx$ iii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\eta\mu x}\cdot \eta\mu 2x dx$.

60)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $\int_4^9 f(x)dx = 6$. Να υπολογίσετε το $I=\int_2^3 xf(x^2)dx$.

61)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to(1,+\infty)$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,5) και Β(3,9). Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_1^3 \frac{4f'(x)}{f^2(x)+2f(x)-3}dx$.

62)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to(0,+\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0,1). Αν ισχύει : $\int_0^2 (xf''(x)+3f'(x))dx = 6$ τότε :

i. Να βρείτε την τιμή $f(2)$

ii. Να βρείτε το $\int_0^2 \frac{2f'(x)}{f^2(x)+2f(x)}dx$

iii. Να αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$, ώστε $f'(\xi)=1$.

5Β. ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ $x=\alpha+\beta-u$

Αν έχουμε ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το οποίο δεν υπολογίζεται με κάποια από τις γνωστές μεθόδους, τότε ίσως μπορεί να υπολογιστεί με αντικατάσταση : $x=\alpha+\beta-u$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

63)Να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : i. $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$ ii. $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx$

Λύση :

Στο $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ θέτω $x=\alpha+\beta-u$, άρα $dx=(\alpha+\beta-u)'du \Leftrightarrow dx=-du$

Για $x=\alpha$ είναι $\alpha=\alpha+\beta-u \Leftrightarrow u=\beta$

Για $x=\beta$ είναι $\beta=\alpha+\beta-u \Leftrightarrow u=\alpha$

Άρα : $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\beta^\alpha -f(\alpha+\beta-u)du=\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$

i. Στο $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$ θέτω $x=-1+1-u \Leftrightarrow x=-u$, άρα $dx=-du$

Για $x=-1$ είναι $u=1$

Για $x=1$ είναι $u=-1$

Άρα : $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx=\int_1^{-1}-\frac{(-u)^2}{e^{-u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2}{\frac{1}{e^u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2e^u}{e^u+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{e^x+1}dx$

Έτσι : $I_1+I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{e^x+1}dx \Leftrightarrow 2I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+x^2e^x}{e^x+1}dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2(e^x+1)}{e^x+1}dx \Leftrightarrow 2I_1=\int_{-1}^{1}x^2dx \Leftrightarrow 2I_1=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} \Leftrightarrow I_1=\frac{1}{3}$

ii. Στο $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx$ θέτω $x=0+\frac{\pi}{2}-u \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-u$, άρα $dx=-du$

Για $x=0$ είναι $u=\frac{\pi}{2}$

Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=0$

Άρα : $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln\left(\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+1}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+1}\right)(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu u+1}{\eta\mu u+1}\right)du=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu x+1}\right)dx$

Έτσι : $I_2+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu x+1}\right)dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)^{-1} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2I_2 = 0 \Leftrightarrow I_2 = 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

64)Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

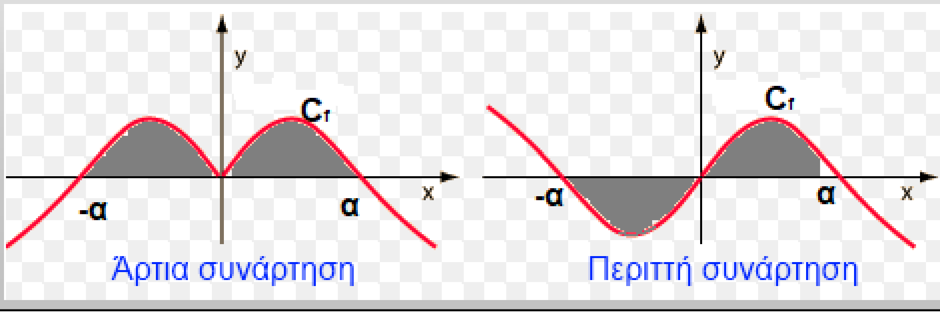
i. $\int_{-1}^{1} \frac{x^4+e^x}{e^x+1}dx$ ii. $\int_{-1}^{1} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ iii. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\varepsilon\varphi^3 x+1}dx$

5Γ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΡΤΙΑΣ – ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Χαρακτηριστικό γνώρισμα της συγκεκριμένης περίπτωσης είναι η ολοκλήρωση σε συμμετρικό διάστημα : $[-\alpha,\alpha]$, $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$, δηλ. το ολοκλήρωμα έχει ***αντίθετα άκρα***.

Θα αποδείξουμε ότι :

- Αν η f είναι άρτια, τότε : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)dx$
- Αν η f είναι περιττή, τότε : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

65)Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$.

i. Αν η f είναι περιττή, τότε να δείξετε ότι ισχύει : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

ii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : $\int_{-1}^{1} \frac{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{1+x\eta\mu x}dx$

Λύση :

i. Η $f:[-\alpha,\alpha]\to\Re$ είναι περιττή, άρα για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$ ισχύει ότι : $f(-x)=-f(x)$

Στο $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$, θέτω $x=-u$, άρα $dx=-du$

Για $x=-\alpha$ είναι $u=\alpha$

Για $x=\alpha$ είναι $u=-\alpha$

Έτσι : $I=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{\alpha}^{-\alpha} f(-u)(-du) = \int_{-a}^{a} f(-u)du = \int_{-a}^{a} -f(u)du = -\int_{-a}^{a} f(x)dx = -I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0 \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

ii. Έστω $f(x) = \dfrac{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{1+x\eta\mu x}$, με $x \in [-1,1]$. Για κάθε $x \in [-1,1]$ και $-x \in [-1,1]$

$$f(-x) = \frac{\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right)}{1-x\eta\mu(-x)} = \frac{\ln\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)}{1+x\eta\mu x} = \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)}{1+x\eta\mu x} =$$

$= \dfrac{\ln 1 - \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{1+x\eta\mu x} = -f(x)$, άρα η f είναι περιττή

οπότε από i. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \dfrac{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{1+x\eta\mu x}dx = 0$.

66)Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$.

i. Αν η f είναι άρτια, τότε να δείξετε ότι ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_{-1}^{1} \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x + e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx$

Λύση :

i. Η $f:[-\alpha,\alpha] \to \Re$ είναι άρτια, άρα για κάθε $x \in [-\alpha,\alpha]$ ισχύει ότι : $f(-x) = f(x)$

Έτσι : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$ (1)

Στο $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ θέτω $x = -u$, άρα $dx = -du$

Για $x = -\alpha$ είναι $u = \alpha$

Για $x = 0$ είναι $u = 0$

Έτσι : $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{\alpha}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)du = \int_{0}^{a} f(u)du = \int_{0}^{a} f(x)dx$

Άρα : $(1) \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

ii. Είναι $I = \int_{-1}^{1} \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x + e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx = \int_{-1}^{1} \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}dx + \int_{-1}^{1} \dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx$ (1)

Έστω : $f(x) = \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}$, με $x \in [-1,1]$ και $-x \in [-1,1]$,

$f(-x) = \dfrac{-x\sigma\upsilon\nu(-x)}{1+e^{|-x|}} = \dfrac{-x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}} = -f(x)$, άρα η f είναι περιττή.

και $g(x) = \dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}$, με $x \in [-1,1]$ και $-x \in [-1,1]$,

$g(-x) = \dfrac{e^{|-x|}}{1+e^{|-x|}} = \dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}} = g(x)$, άρα η g είναι άρτια.

Έτσι : $(1) \Leftrightarrow I = \int_{-1}^{1} \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}dx + \int_{-1}^{1} \dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx \Leftrightarrow I = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} g(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I = 0 + 2\int_{0}^{1} \dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx \overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow} I = 2\int_{0}^{1} \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}dx \Leftrightarrow I = 2\int_{0}^{1} \dfrac{(1+e^{x})'}{1+e^{x}}dx \Leftrightarrow I = 2\left[\ln(1+e^{x})\right]_{0}^{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I = 2\left(\ln(1+e) - \ln 2\right)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

67)Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_{-1}^{1}\frac{x}{2+\sigma\upsilon\nu x}dx$ ii. $\int_{-1}^{1}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ iii. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\varepsilon\varphi^3 x+1}dx$ iv. $\int_{-2}^{2}\frac{x^{15}\eta\mu^2 x}{2+\sigma\upsilon\nu x}dx$

68)Δίνεται παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(1,f(1))$ έχει εξίσωση $y=2x-5$. Να βρείτε :

i. τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$
ii. την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{N}(-1,f(-1))$
iii. το ολοκλήρωμα : $I=\int_{-1}^{1}\left(f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+x\cdot f''(x)\right)dx$

5Δ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής : $\int_{\alpha}^{\beta}\eta\mu^{\kappa}x\cdot\sigma\upsilon\nu^{\lambda}xdx$,

- αν το ημx είναι υψωμένο σε **περιττή** δύναμη τότε θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$
- αν το συνx είναι υψωμένο σε **περιττή** δύναμη τότε θέτουμε $u=\eta\mu x$
- Αν και το ημx και το συνx είναι υψωμένα σε **άρτια** δύναμη, τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους αποτετραγωνισμου : $\eta\mu^2 x=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

69)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα : i. $\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^3 xdx$ ii. $\int_0^{\pi}\eta\mu^2 xdx$

iii. $\int_0^{\pi}\eta\mu^3 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 xdx$

Λύση :

i. $\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^3 xdx$, θέτω $u=\eta\mu x$, άρα $du=\sigma\upsilon\nu xdx\Leftrightarrow dx=\frac{du}{\sigma\upsilon\nu x}$

Για $x=0$ είναι $u=0$

Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=1$

Έτσι : $\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^3 xdx=\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu xdx=\int_0^{\pi}(1-\eta\mu^2 x)\sigma\upsilon\nu xdx=\int_0^1(1-u^2)\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{du}{\sigma\upsilon\nu x}=$

$=\int_0^1(1-u^2)du=\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

ii. $\int_0^{\pi}\eta\mu^2 xdx=\int_0^{\pi}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\sigma\upsilon\nu 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

iii. $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx$, θέτω $u = \sigma\upsilon\nu x$, άρα $du = -\eta\mu x dx \Leftrightarrow dx = -\dfrac{du}{\eta\mu x}$

Για $x = 0$ είναι $u = 1$

Για $x = \pi$ είναι $u = -1$

Έτσι : $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x \cdot \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)\sigma\upsilon\nu^2 x dx =$

$$= \int_1^{-1} \eta\mu x \cdot (1-u^2)u^2 \cdot \left(-\frac{du}{\eta\mu x}\right) = -\int_1^{-1} \left(u^2 - u^4\right) du = \int_{-1}^{1} \left(u^2 - u^4\right) du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{15}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

70)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα : i. $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x dx$ ii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x dx$

71) Αν $I = \int_0^{\pi/2} x \eta\mu^2 x dx$, $J = \int_0^{\pi/2} x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :
$I + J$, $I - J$, *I*, *J*.

5Ε. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

- Για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής : $\int_{\kappa}^{\lambda} f\left(x, \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 x^2}\right) dx$ θέτουμε $x = \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \eta\mu u$ με $u \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
- Για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής : $\int_{\kappa}^{\lambda} f\left(x, \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 x^2}\right) dx$ θέτουμε $x = \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \varepsilon\varphi u$ με $u \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$
- Αν σε ολοκλήρωμα εμφανίζεται (σε παρανομαστή) η παράσταση $\alpha^2 x^2 + \beta^2$, τότε συνήθως θέτουμε : $x = \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \varepsilon\varphi u$ με $u \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

72)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα : i. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ ii. $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} dx$

iii. $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ iv. $\int_0^1 \dfrac{1}{x^2+1} dx$ v. $\int_0^2 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx$ vi. $\int_1^e \dfrac{\ln^2 x}{x} \cdot \sqrt{4 - \ln^2 x} dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για να υπολογίσουμε ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx$, και δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της $f^{-1}(x)$, τότε εργαζόμαστε ως εξής :

i. Θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(u) = x$ άρα είναι $dx = f'(u)du$

ii. Βρίσκουμε τα νέα άκρα ολοκλήρωσης και τελικά το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται : $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx = \int_{\gamma}^{\delta} uf'(u)du = [uf(u)]_{\gamma}^{\delta} - \int_{\gamma}^{\delta} f(u)du...$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

73)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re \to \Re$, με τύπο : $f(x) = x^3 + x + 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{3} f^{-1}(x)dx$

Λύση :

i. $D_f = \Re$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = \Re$, άρα η $f(x)$ είναι 1-1 και άρα είναι και αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$, είναι το σύνολο τιμών της $f(x)$. Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $D_f = \Re$, άρα $f(\mathrm{A}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 + x + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 + x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$

Άρα $f(\mathrm{A}) = (-\infty, +\infty) = \Re = D_{f^{-1}}$

ii. Στο ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{3} f^{-1}(x)dx$ θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(u) = x$ άρα είναι $dx = f'(u)du$.

Για $x = -1$ είναι $f(u) = -1 \Leftrightarrow f(u) = f(-1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} u = -1$

Για $x = 3$ είναι $f(u) = 3 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} u = 1$

Άρα : $\int_{-1}^{3} f^{-1}(x)dx = \int_{-1}^{1} f^{-1}(f(u)) \cdot f'(u)du = \int_{-1}^{1} u(3u^2 + 1)du = \int_{-1}^{1}(3u^3 + u)du =$

$$= \left[3\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

74)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re \to \Re$, με τύπο : $f(x) = x^3 + 2x + 3$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{6} f^{-1}(x)dx$

75)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$, με $x \in \Re$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι ¨1-1¨ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{1}^{e+1} f^{-1}(x)dx$

76)Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)+2=x$, για κάθε $x\in\Re$. Να υπολογίσετε το $\int_0^4 f(x)dx$.

77)Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(\sqrt{e})=2$ και : $xf'(x)\ln x+f(x)=0$ για κάθε $x>1$

i. Να βρείτε τον τύπο της f
ii. Να ορίσετε την $f^{-1}(x)$
iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}dx+\int_1^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{x}}dx$

78)Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\Re$ με $f(x)=e^{x^2}$

i. Να ορίσετε την $f^{-1}(x)$
ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_0^1\frac{1}{1+x+e^{x^2}}dx+\int_1^e\frac{1}{1+x+\sqrt{\ln x}}dx$.

79)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$, η C_f διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(0,-1)$ και $\mathrm{B}(2,5)$ και ισχύει : $\int_0^2 xf''(x)dx=0$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Β.
ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$, ώστε $f''(\xi)=0$.
iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_{-1}^5\left(\frac{1}{3}f\left(\frac{x+1}{3}\right)+f^{-1}(x)\right)dx$.

80)Θεωρούμε τη συνάρτηση : $f(x)=x-\ln x+e^x$, με $x\in(1,+\infty)$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$
ii. Να βρεθούν τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2005$ έχει μοναδική λύση στο $(1,+\infty)$
iv. Έστω $\Pi=\int_2^e f(x)dx+\int_{f(2)}^{f(e)}f^{-1}(x)dx$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi-2\ln 2$. (4ο Ομογενείς 2005)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΣΧΕΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Αν έχουμε μια συναρτησιακή σχέση :

- $f(x)+\gamma f\big(g(x)\big)=h(x)$ (1) και θέλουμε να υπολογίσουμε το $I=\int_{\kappa}^{\lambda} f(x)dx$ ή να δείξουμε μια σχέση που περιέχει αυτό, τότε λύνουμε την (1) ως προς $f(x)$, ολοκληρώνουμε και αλλάζουμε μεταβλητή και άκρα ολοκλήρωσης.
- $f\big(h_1(x)\big)+\gamma f\big(h_2(x)\big)=h_3(x)$ (2) τότε θέτουμε $y=h_1(x)$ και η (2) γίνεται $f\big(y\big)+\gamma f\big(g(y)\big)=h(y)$ ή $f\big(x\big)+\gamma f\big(g(x)\big)=h(x)$ που είναι η (1).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

81)Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,5]\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x)+f(6-x)=3$ για κάθε $x\in[1,5]$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^5 f(x)dx$.

Λύση : Για κάθε $x\in[1,5]$ είναι : $f(x)+f(6-x)=3 \Leftrightarrow f(x)=3-f(6-x)$ (1)

Άρα : $\int_1^5 f(x)dx \overset{(1)}{=} \int_1^5 \big(3-f(6-x)\big)dx=\int_1^5 3dx-\int_1^5 f(6-x)dx=[3x]_1^5-\int_1^5 f(6-x)dx=12-\int_1^5 f(6-x)dx$

Δηλ. $\int_1^5 f(x)dx=12-\int_1^5 f(6-x)dx$ (2)

Για το $\int_1^5 f(6-x)dx$ θέτω $6-x=u$ άρα $-dx=du \Leftrightarrow dx=-du$

Όταν $x=1$ το $u=5$, ενώ όταν $x=5$ το $u=1$

Άρα $\int_1^5 f(6-x)dx=\int_5^1 f(u)(-du)=\int_1^5 f(u)du=\int_1^5 f(x)dx$

Τελικά η (2) γίνεται : $\int_1^5 f(x)dx=12-\int_1^5 f(6-x)dx \Leftrightarrow \int_1^5 f(x)dx=12-\int_1^5 f(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int_1^5 f(x)dx=12 \Leftrightarrow \int_1^5 f(x)dx=6$.

82)Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(2-x)+f(x-3)=2$ για κάθε $x\in\Re$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^0 f(x)dx$.

Λύση : Για κάθε $x\in\Re$ είναι $f(2-x)+f(x-3)=2$ (1)

Θέτω $2-x=y \Leftrightarrow x=2-y$ άρα η (1) γίνεται : $f(y)+f(2-y-3)=2 \Leftrightarrow$

$f(y)+f(-1-y)=2$ ή $f(x)=2-f(-1-x)$ (2)

Άρα :

$\int_{-1}^0 f(x)dx \overset{(2)}{=} \int_{-1}^0 \big(2-f(-1-x)\big)dx=\int_{-1}^0 2dx-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx=[2x]_{-1}^0-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx=2-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx$

Δηλ. $\int_{-1}^0 f(x)dx=2-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx$ (3)

Για το $\int_{-1}^0 f(-1-x)dx$ θέτω $-1-x=u$ άρα $-dx=du \Leftrightarrow dx=-du$

Όταν $x=-1$ το $u=0$, ενώ όταν $x=0$ το $u=-1$

Άρα $\int_{-1}^0 f(-1-x)dx=\int_0^{-1} f(u)(-du)=\int_{-1}^0 f(u)du=\int_{-1}^0 f(x)dx$

Τελικά η (3) γίνεται : $\int_{-1}^0 f(x)dx=2-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx \Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx=2-\int_{-1}^0 f(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int_{-1}^0 f(x)dx=2 \Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

83)Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f(x)+f(-x)=x^2 \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \Re$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

84)Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f(2-x)+f(x+2)=1$ για κάθε $x \in \Re$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{4} f(x)dx$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Στα ολοκληρώματα ισχύουν οι παρακάτω ανισοτικές σχέσεις :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

(αν η f δεν είναι παντού 0 τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : Αν $f(x) \geq g(x)$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

(αν η f,g δεν είναι ισες τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : $m(\beta-\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \mathrm{M}(\beta-\alpha)$

Απόδειξη :

Έστω $f:[a,\beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα της f στο $[a,\beta]$. Τότε ισχύει ότι : $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,\beta]$

Οπότε : $\int_{\alpha}^{\beta} mdx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} Mdx$ δηλαδή : $m(\beta-\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$

Για να αποδείξουμε ανισότητες στα ολοκληρώματα, συχνά χρησιμοποιούμε :

- Τις βασικές ανισότητες :
  - $f^2(x) \geq 0$
  - $|\eta\mu x| \leq |x|$
  - $\ln x \leq x-1,\ x>0$
  - $e^x \geq x+1,\ x \in \Re$
- Τις ανισότητες $\min f \leq f(x) \leq \max f$, $x \in [\alpha,\beta]$
- Τις ανισότητες που προκύπτουν από τη μονοτονία της f και τις σχέσεις $\alpha \leq x \leq \beta$
- Τις ανισότητες που προκύπτουν από το Θ.Μ.Τ. και τη μονοτονία της f'
- Την ανισότητα που προκύπτει από την κυρτότητα μιας συνάρτησης και την εφαπτομένη της σε ένα σημείο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

85) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ με τύπο $f(x)=x+\dfrac{1}{x}-2$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)\ge 0$ για κάθε $x>0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ii. $\int_1^3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx>4$

Λύση :

i. $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}-2\ge 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2-2x+1\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0$ που ισχύει για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

ii. Είναι $f(x)\ge 0$ για κάθε $x>0$ και το $''=''$ ισχύει μόνο για $x=1$.

Έτσι : $\int_1^3 f(x)dx>0 \Leftrightarrow \int_1^3\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)dx>0 \Leftrightarrow \int_1^3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx-\int_1^3 2dx>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx>\int_1^3 2dx \Leftrightarrow \int_1^3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx>[2x]_1^3 \Leftrightarrow \int_1^3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx>4$.

86) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-1-\ln x$.

i. Να βρείτε τη ελάχιστη τιμή της f

ii. Να αποδείξετε ότι $\ln\left(1+x^2\right)\le x^2$ για κάθε $x\in\Re$

iii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1\ln\left(1+x^2\right)dx<\dfrac{1}{3}$

Λύση :

i. $A_f=(0,+\infty)$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία μόνο ρίζα, την $x=1$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της *f* φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0 min	$\nearrow$	

Επειδή η *f* για $x=1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει: $f(x)\ge f(0) \Leftrightarrow x-1-\ln x\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\le x-1$ (βασική ανισότητα). Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=1$.

ii. Στην ανισότητα $\ln x\le x-1$, αν θέσω όπου x το $x^2+1>0$ για κάθε $x\in\Re$, έχω $\ln(x^2+1)\le x^2+1-1 \Leftrightarrow \ln(x^2+1)\le x^2$, για κάθε $x\in\Re$

iii. Στην ανισότητα $\ln x\le x-1$ το $''=''$ ισχύει μόνο για $x=1$

Άρα για κάθε $x\in[0,1]$, $\ln(x^2+1)\le x^2$ και το $''=''$ ισχύει μόνο για $x^2+1=1 \Leftrightarrow x=0$

έτσι : $\int_0^1\ln\left(1+x^2\right)dx<\int_0^1 x^2dx \Leftrightarrow \int_0^1\ln\left(1+x^2\right)dx<\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1\ln\left(1+x^2\right)dx<\dfrac{1}{3}$.

87) Έστω η συνάρτηση $f:[1,e]\to\Re$ με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

ii. Να αποδείξετε ότι $0 \le \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx \le 1-\frac{1}{e}$

Λύση :

i. Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$ και $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$ για κάθε $x \in (1,e)$ άρα η $f \uparrow [1,e]$, οπότε στο $x_1=1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(1)=0$, ενώ στο $x_2=e$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(e)=\frac{1}{e}$.

ii. Για κάθε $x \in [1,e]$, είναι : $\min f \le f(x) \le \max f \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le \frac{1}{e}$, άρα

$$\int_1^e 0dx \le \int_1^e f(x)dx \le \int_1^e \frac{1}{e}dx \Leftrightarrow 0 \le \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx \le \left[\frac{1}{e}x\right]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e 0dx \le \int_1^e f(x)dx \le 1-\frac{1}{e}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

88) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1 f(x)dx=1$

i. Να αποδείξετε ότι : $f^2(x)-2f(x)+1\ge 0$ για κάθε $x\in[0,1]$

ii. $\int_0^1 f^2(x)dx \ge 1$

89) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1 f^2(x)dx=1$

i. Να αποδείξετε ότι : $f^2(x)-2f(x)e^x+e^{2x}\ge 0$ για κάθε $x\in[0,1]$

ii. $\int_0^1 e^x f(x)dx \le \frac{e^2+1}{4}$

90) Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{e^x}{x^2+1}\ge 1$ για κάθε $x\in[0,1]$ ii. $\int_0^1 e^x dx \ge \int_0^1 (x^2+1)dx$

91) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με τύπο : $f(x)=2-e^{-x^2}$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 \left(2-e^{-x^2}\right)dx \ge 2$

92) Δίνεται η συνάρτηση $f:(-2,+\infty)\to\Re$ με τύπο : $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f στο [1,2]

iii. Να αποδείξετε ότι $0\le \int_1^2 \frac{x-1}{x+2}dx \le \frac{1}{4}$

93) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\Re$ με τύπο : $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $0\le \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx \le \ln 2$

94) Να αποδείξετε ότι $1\le \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx \le \sqrt{2}$

95) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\varepsilon\varphi x > x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{3}{\pi}$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ και

ii. $\frac{\sqrt{3}}{4} \le \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\eta\mu x}{x} dx \le \frac{1}{2}$.

96) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x \ge 1 + x$ για κάθε $x \in \Re$, να αποδείξετε ότι:

i. $1 - x^2 \le e^{-x^2} \le 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και

ii. $\frac{2}{3} \le \int_0^1 e^{-x} dx \le 1$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 : Αν $f(x) \ge 0$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε : $f(x) = 0$

Απόδειξη :

Έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε να είναι $f(x_0) \ne 0$. Τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f(x) \ge 0$, προκύπτει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ που είναι αδύνατο. Άρα για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f(x) = 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

97) Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0,1] \to \Re$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^1 \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2} dx = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Λύση :

$$\int_0^1 \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2} dx = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 \left(f^2(x) + g^2(x)\right) dx = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f^2(x) + g^2(x)\right) dx = \int_0^1 2f(x) \cdot g(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f^2(x) - 2f(x)g(x) + g^2(x)\right) dx = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f(x) - g(x)\right)^2 dx = 0$, η συνάρτηση $h(x) = \left(f(x) - g(x)\right)^2$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $h(x) = \left(f(x) - g(x)\right)^2 \ge 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $\int_0^1 h(x)dx = 0$, άρα για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $h(x) = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) - g(x)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

98) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{-\nu x}$, $x\in\Re$, $\nu\in N^*$.

i. Να μελετήσετε την f, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

ii. Να αποδείξετε ότι $2\le e^2\nu^2\int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}}xe^{-\nu x}dx\le e$ (1993)

99) Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο R, δυο φορές παραγωγισιμη, με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$. Έστω $\alpha,\beta\in\Re$ με α<β. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)-f(\alpha)\le f^2(\beta)(x-\alpha)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ii. $2\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\le f'(\beta)(\beta-\alpha)^2+2f(\alpha)(\beta-\alpha)$. (1997)

100) Δίνεται η συνάρτηση $f(t)=\dfrac{2t+3}{t+2}$, $t\in[1,4]$

i. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_1^4 f(t)dt$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\int_1^4 f(t)\dfrac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt$, x>0..

ii. Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x^2}}\le e^{\frac{t}{x^2}}\le e^{\frac{4}{x^2}}$, για κάθε $t\in[1,4]$ και x>0.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ (1999)

101) Να δείξετε ότι $\int_e^x\dfrac{\ln x}{\ln t}dt>x-e\ln x$, για κάθε $x>e$.