3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1 ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

60. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα** της **f** στο **Δ** ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Σχόλια :

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

61. Θεώρημα (2001 Β΄, 2003, 2015 Β΄)

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$,είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$.

Απόδειξη :

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in R$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε , για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν οι σχέσεις $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε : $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

62. Πίνακας των παραγουσών βασικών συναρτήσεων.

Απάντηση :

Συνάρτηση	Παράγουσα
$f(x)=0$	$F(x)=c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=1$	$F(x)=x+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=x^{\alpha}$	$F(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\,,\ c\in\Re\,,\ \alpha\neq-1$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$F(x)=\eta\mu x+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=\eta\mu x$	$F(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$F(x)=\varepsilon\phi x+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$	$F(x)=-\sigma\phi x+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=e^{x}$	$F(x)=e^{x}+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=\alpha^{x}$	$F(x)=\dfrac{\alpha^{x}}{\ln\alpha}+c\,,\ c\in\Re$

Σχόλια :

- Οι τύποι αυτού του πίνακα ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.
- Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε :

  i. Η συνάρτηση F+G είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f+g

  ii. Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ :
Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα** της **f** στο **Δ** ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ :
Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in R$,είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in R$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- $0=(c)'$
- $c=(cx)'$
- $x^{\alpha}=\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'$, $\alpha\neq -1$
- $\dfrac{1}{x}=(\ln|x|)'$, $x\neq 0$
- $\dfrac{1}{x^2}=\left(-\dfrac{1}{x}\right)'$, $x\neq 0$
- $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=(\sqrt{x})'$
- $\eta\mu x=(-\sigma\upsilon\nu x)'$
- $\sigma\upsilon\nu x=(\eta\mu x)'$
- $e^x=(e^x)'$
- $\alpha^x=\left(\dfrac{\alpha^x}{\ln a}\right)'$
- $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=(\varepsilon\phi x)'$
- $\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}=(-\sigma\phi x)'$

- $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$
- $f(x)+x\cdot f'(x)=\left(x\cdot f(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\left(\ln|f(x)|\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'$
- $e^{f(x)}\cdot f'(x)=\left(e^{f(x)}\right)'$
- $f^{\nu}(x)\cdot f'(x)=\left(\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right)'$ π.χ. $f(x)\cdot f'(x)=\left(\dfrac{f^2(x)}{2}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\sqrt{f(x)}\right)'$
- $\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)=\left(\eta\mu f(x)\right)'$
- $\eta\mu f(x)\cdot f'(x)=\left(-\sigma\upsilon\nu f(x)\right)'$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x)=3x^2$ και μετά, να βρείτε εκείνη από τις παράγουσες που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,2).

   Λύση :

   Είναι : $F(x)=3\dfrac{x^{2+1}}{2+1}+c=3\dfrac{x^3}{3}+c=x^3+c,\ \ x\in\Re,\ c\in\Re$

   Η C_F διέρχεται από το $\mathrm{A}(1,2)$ άρα : $F(1)=2\Leftrightarrow 1^3+c=2\Leftrightarrow c=1$.

   Άρα : $F(x)=x^3+1,\ \ x\in\Re$

2. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

   (Παράγουσες Βασικών Συναρτήσεων)

   i. $f(x)=x^3+12x^2-6x-5$

   ii. $f(x)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{x}+2e^x\ ,\ x>0$

   iii. $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{5}{\eta\mu^2x}-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}+2\eta\mu x-3\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

iv. $f(x)=\dfrac{2x^3+x-1}{x^2},\ x>0$

Λύση :

i. $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+12\dfrac{x^3}{3}-6\dfrac{x^2}{2}-5x+c \Leftrightarrow F(x)=\dfrac{x^4}{4}+4x^3-3x^2-5x+c\ ,x\in\Re,\quad c\in\Re$

ii. $F(x)=3\ln|x|+\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+2e^x+c \Leftrightarrow F(x)=3\ln|x|+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+2e^x+c \Leftrightarrow$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} F(x)=3\ln x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2e^x+c\ ,\ x>0,\quad c\in\Re \qquad \left(\pi\rho o\sigma o\chi\acute{\eta}:\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\right)$

iii. $F(x)=3\dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-5\sigma\phi x-\varepsilon\phi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x+c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x)=3\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-5\sigma\phi x-\varepsilon\phi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x+c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x)=6\sqrt{x}-5\sigma\phi x-\varepsilon\phi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x+c \quad x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\quad c\in\Re$

$\left(\pi\rho o\sigma o\chi\acute{\eta}:\dfrac{3}{\sqrt{x}}=\dfrac{3}{x^{\frac{1}{2}}}=3x^{-\frac{1}{2}}\right)$

iv. Είναι : $f(x)=\dfrac{2x^3+x-1}{x^2}=2x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$, άρα :

$F(x)=x^2+\ln|x|+\dfrac{1}{x}+c \overset{x>0}{\Leftrightarrow} F(x)=x^2+\ln x+\dfrac{1}{x}+c \qquad x>0,\quad c\in\Re$

3. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

(Παράγουσες Συναρτήσεων με εφαρμογή κανόνων παραγώγισης)

i. $f(x)=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x$

ii. $f(x)=\dfrac{2e^x-xe^x}{x^3}\ ,\ x>0$

iii. $f(x)=\dfrac{e^x(1+x\ln x)}{x}\ ,\ x>0$

Λύση :

i. $f(x)=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x=(x^2)'\eta\mu x+x^2(\eta\mu x)'=(x^2\cdot\eta\mu x)'$

Άρα : $F(x)=x^2\cdot\eta\mu x+c\ ,\ x\in\Re,\quad c\in\Re$

ii. $f(x)=\dfrac{2e^x-xe^x}{x^3}=\dfrac{2xe^x-x^2e^x}{x^4}=-\dfrac{x^2e^x-2xe^x}{x^4}=\left(-\dfrac{e^x}{x^2}\right)'$

Άρα : $F(x)=-\dfrac{e^x}{x^2}+c \qquad x>0,\quad c\in\Re$

iii. $f(x)=\dfrac{e^x(1+x\ln x)}{x}=\dfrac{e^x+e^x x\ln x}{x}=\dfrac{e^x}{x}+e^x\ln x=e^x\dfrac{1}{x}+e^x\ln x=\left(e^x\ln x\right)'$

Άρα : $F(x)=e^x\ln x+c \quad x>0,\quad c\in\Re$

4. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :
(Παράγουσες Σύνθετων Συναρτήσεων)

i. $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

ii. $f(x)=(x^2+3x+5)^6\cdot(2x+3)$

iii. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+2017}$

iv. $f(x)=\dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}$

Λύση :

i. $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}=(-\sigma\upsilon\nu x)'\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}=\left(-e^{\sigma\upsilon\nu x}\right)'$, άρα : $F(x)=-e^{\sigma\upsilon\nu x}+c \quad x\in\Re,\quad c\in\Re$

ii. $f(x)=(x^2+3x+5)^6\cdot(2x+3)=(x^2+3x+5)^6\cdot(x^2+3x+5)'=\left(\dfrac{\left(x^2+3x+5\right)^7}{7}\right)'$

Άρα : $F(x)=\dfrac{\left(x^2+3x+5\right)^7}{7}+c \quad x\in\Re,\quad c\in\Re$.

iii. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+2017}=\dfrac{\left(x^2-x+2017\right)'}{x^2-x+2017}=\left(\ln\left|x^2-x+2017\right|\right)'$

Άρα : $F(x)=\ln\left|x^2-x+2017\right|+c \quad x\in\Re,\quad c\in\Re$.

iv. $f(x)=\dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1+\eta\mu^2x}}=\dfrac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1+\eta\mu^2x}}=\dfrac{2\eta\mu x\cdot(\eta\mu x)'}{\sqrt{1+\eta\mu^2x}}=\dfrac{\left(1+\eta\mu^2x\right)'}{\sqrt{1+\eta\mu^2x}}=2\dfrac{\left(1+\eta\mu^2x\right)'}{2\sqrt{1+\eta\mu^2x}}=\left(2\sqrt{1+\eta\mu^2x}\right)'$

Άρα : $F(x)=2\sqrt{1+\eta\mu^2x}+c \quad x\in\Re,\quad c\in\Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x)=x^2$ και μετά, να βρείτε εκείνη από τις παράγουσες που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0,1).

6. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x)=x$ και μετά, να βρείτε εκείνη από τις παράγουσες που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,3).

7. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

v. $f(x)=x$

vi. $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $x>0$

vii. $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$

viii. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x>0$

8. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=x^3$

ii. $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$, $x>0$

iii. $f(x)=\sqrt[3]{x}$

iv. $f(x)=x\sqrt{x}$

9. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sigma\upsilon\nu x$, $x>0$

ii. $f(x)=2e^x-\dfrac{3}{\eta\mu^2 x}$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

iii. $f(x)=3^{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2$, $x>0$

10. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\eta\mu x-\dfrac{1}{x^2}+e^{-x}$, $x>0$

ii. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

iii. $f(x)=2^x-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

11. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{3x^3+2x-1}{x^2}$, $x>0$

ii. $f(x)=\dfrac{(3x-2)^2}{x^2}$, $x<0$

iii. $f(x)=\dfrac{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^2 x-2}{\eta\mu^2 x}$, $x\in(0,\pi)$

12. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x$

ii. $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{e^x}$

iii. $f(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$, $x>0$

iv. $f(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$

v. $f(x)=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

vi. $f(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}$

13. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = (2x-3)(x^2-3x+1)^2$

ii. $f(x) = (3x^2-2)(x^3-2x+1)^2$

iii. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^3}$

iv. $f(x) = \dfrac{3x}{(x^2+3)^2}$

v. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

vi. $f(x) = x\sqrt{3x^2+2}$

vii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x}$

viii. $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

ix. $f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x - 5e^{2x}$

x. $f(x) = 2\eta\mu 3x - 5\cdot 2^x$

xi. $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

xii. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

xiii. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

xiv. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x>1$

xv. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $x>-3$

xvi. $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

xvii. $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ

2Α. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

14. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$, με $f(1)=7$ και F μια αρχική της f στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει : $F(x) = xf(x) - 2x^3$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f .

15. Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, με $F(0)=0$ όπου F μια αρχική της f, για την οποία ισχύει : $2xF(x) + x^2 f(x) = 4x^3 - f(x)$ για κάθε $x\in\Re$.
   i. Να βρείτε τον τύπο της f .
   ii. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

2Β. ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ – ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΥΠΑΡΞΗΣ

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}(x-1)$ και F μια αρχική της f στο $\Re$ με $F(1)=0$.
   i. Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $F\left(F'(x)-2015\right)=0$ έχει μοναδική ρίζα.
   iii. Να δείξετε ότι η F είναι κυρτή.
   iv. Να δείξετε ότι : $F(x-1)+F(x+1)>2F(x)$ για κάθε $x\in\Re$.

17. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ και F μια αρχική της f, για την οποία ισχύει : $F(1-2x)+F(x^2+2)=x^4+5x^2+2x$ για κάθε $x\in\Re$.
   i. Να βρείτε τις τιμές $f(1),\ f(3)$.
   ii. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$, με $x_0\in(1,3)$.
   iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,3)$, με $\xi_1<\xi_2$, ώστε : $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{3}{f'(\xi_2)}=2$.

18. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και F μια παράγουσα της f στο $[0,1]$ με $F(0)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $2F\left(x^2-x\right)=-x(2x-1)f\left(x^2-x\right)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

19. Έστω $f:(0,+\infty)\to\Re$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και F μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$ με $F(0)=0$. Αν ισχύει $F(x)\le e^x\ln(x+1)$, για κάθε $x>-1$, να δείξετε ότι C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,1)$.

2Γ. ΟΡΙΑ

20. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με $f(0)=0$ και $f'(0)=1$. Αν F μια παράγουσα της f στο $\Re$ με $F(0)=0$, να βρείτε τα όρια :
   i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xF(x)}{(e^x-1)\eta\mu x}$
   ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{f(x)}$
   iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xF(x)}{e^x-x-1}$
   iv. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(e^{F^2(x)}-1\right)\ln|f(x)|\right]$