ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 3ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1) Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ με $f(x)=\ln x-1$.
   - i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=e$ και $x=\lambda$ με $\lambda>0$ και $\lambda\neq e$.
   - ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\mathrm{E}(\lambda)$
   - iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}\left(e^2, f(e^2)\right)$
   - iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα x΄x. ***(ΘΕΜΑ Β study4exams)***

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^3+x-2$.
   - i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
   - ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
   - iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}
   - iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$ ***(ΘΕΜΑ Β study4exams)***

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2e}{x}+2\ln x,\quad x>0$
   - i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   - ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e}$ για κάθε $x>0$
   - iii. Αν ισχύει $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e}$ για κάθε $x>0$ όπου $\lambda>0$ τότε να αποδείξετε ότι $\lambda=e$.
   - iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$. ***(ΘΕΜΑ Γ study4exams)***

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e}{x}+\ln x+1,\quad x>0$
   - i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   - ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.
   - iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=3^{\xi-1}$.
   - iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$. ***(ΘΕΜΑ Γ study4exams)***

5) Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=-2+\frac{2}{x}$ και $g(x)=3\ln x$ με $x>0$.

i. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $h(x)=f(x)-g(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$, με $0<\lambda\neq 1$.

iii. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{E}(\lambda)$

iv. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\mathrm{E}(\lambda)$. ***(ΘΕΜΑ Γ study4exams)***

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2\ln x}{x}+\lambda x+3,\quad x>0,\quad \lambda\in\Re$

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(1,f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\varepsilon): y=3x$ να υπολογίσετε το λ.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη (ε) της C_f στο $+\infty$

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ασύμπτωτη (ε) του προηγούμενου ερωτήματος και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

(ΘΕΜΑ Γ study4exams)

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^4+3\ln x+2$ με $x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda^4=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}-1$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda>0$.

iv. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_0^4 f^{-1}(x)dx$.

8) Έστω δυο συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\Re$ οι οποίες είναι δυο φορές παραγωγίσιμες με $f''(x)=g''(x)-\frac{1}{x^2}$ για κάθε x>0. Αν οι εφαπτομένες στο κοινό σημείο τους με τετμημενη $x_0=1$ είναι παράλληλες να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την C_g και την ευθεία x=e.

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+2-\frac{e^x}{1+e^x}$.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=x+2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, την (ε), τον άξονα y΄y και την ευθεία x=α, α<0.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\mathrm{E}(\alpha)$

iv. Αν το α ελαττώνεται με ρυθμό 2μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε(α) τη χρονική στιγμή που είναι α=-ln2.

10) Έστω $f:(0,+\infty)\to\Re$ με $f(1)=0$ και $xf'(x)-2\ln x>0$ για κάθε $x>0$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)>\ln^2 x$ για κάθε $x>1$.

ii. Αν Ε(λ) το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=λ, λ>1, να αποδείξετε ότι : $E(\lambda)>\lambda\ln^2\lambda-2\lambda\ln\lambda+2\lambda-2$ και μετά να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$.

i. Να βρείτε την ασύμπτωτη (ε) της C_f στο $+\infty$

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τις ευθείες x=1 και x=2.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}$.

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τον άξονα x΄x.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε):y=x είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

ii. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τις ευθείες x=2 και x=λ, λ>2.

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$.

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) τον άξονα x΄x και την ευθεία x=α, α>0.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)$

iv. Αν το α ελαττώνεται με ρυθμό 3μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του Ε(α) τη χρονική στιγμή που είναι α=1.

15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x}$ και η ευθεία (ε):y=x.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία ε είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f

ii. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και την ευθεία x=λ, 0<λ<e.

16) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\ln x, x>0 \\ 0, x=0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.
ii. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=λ , λ>1.
iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathrm{E}(\lambda)$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ 3^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2017

1) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι f(x)$\geq$0 για κάθε x$\in$[α,β].

2) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)\,g(x)\,dx\,.$$

3) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε : $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$

4) Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και λ ∈ IR *, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

5) Ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].

6) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$

7) Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε x ∈ [α, β] ισχύει f(x) ≥ 0 τότε :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

8) Αν f, g, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g'(x)dx$$

9) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α,β,γ∈Δ τότε ισχύει : $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

10) Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

11) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει f(x) < 0 για κάθε x∈[α, β], τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα x'x είναι : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

12) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και ισχύει f(x)≥0 για κάθε x∈[α,β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

13)Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}+\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f΄, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]

14) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\alpha)-G(\beta)$

15) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν ισχύει ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε x∈[α,β], και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$.