2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

49. ΟΡΙΣΜΟΣ (2006, 2010, 2014)
Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα Δ ;

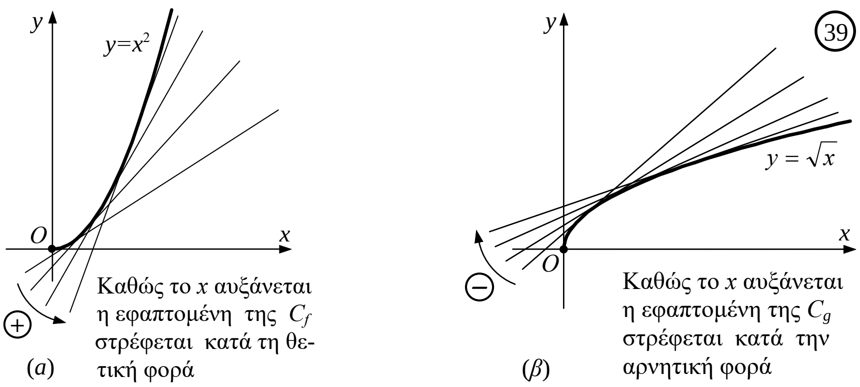
Απάντηση :

Έστω μία συνάρτηση f *σ υ ν ε χ ή ς* σ' ένα διάστημα *Δ* και *π α ρ α γ ω γ ί σ ι μ η* στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

Σχόλιο :

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση *f* είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της *f* σε κάθε σημείο του *Δ* βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



50. ΘΕΩΡΗΜΑ
Να διατυπώσετε το θεώρημα που αφορά τα κοίλα και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της f .

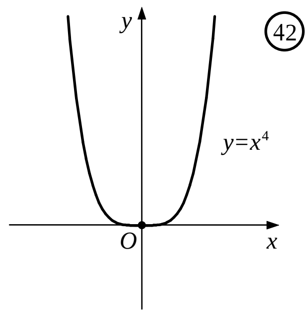
Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο ε σ ω τ ε ρ ι κ ό του Δ.

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Σχόλιο :

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο R, αφού $f''(0) = 0$.



51. ΟΡΙΣΜΟΣ

Πότε το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f ;

Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

Σχόλιο :

Όταν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η **f παρουσιάζει στο** x_0 **καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f διαπερνά την καμπύλη.

52. ΘΕΩΡΗΜΑ

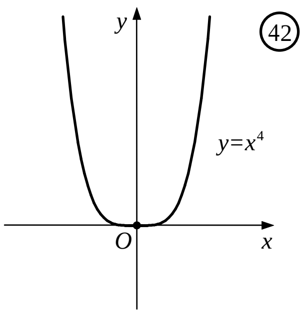
Ποιο θεώρημα αφορά τα σημεία καμπής μιας δυο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης f ;

Απάντηση :

Αν το $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Σχόλιο :

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Ισχύει $f''(x) = 12x^2$ δηλ. $f''(0) = 0$. Όμως η f δεν έχει σημείο καμπής στο 0.



53. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

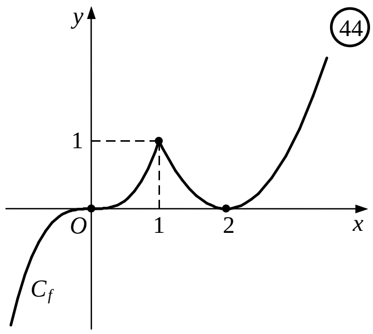
Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

i)Τ**α εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται .**

ii)Τ**α εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .**

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<1 \\ (x-2)^4 & , \quad x\geq 1 \end{cases} \qquad \text{(Σχ. 44)}$$



Η *f* είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re-\{1\}$ με

$$f''(x)=\begin{cases} 6x & , \quad x<1 \\ 12(x-2)^2 & , \quad x>1 \end{cases}.$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$ 0 1		2 $+\infty$	
$f''(x)$	– 0	+	+ 0	+
$f(x)$	κοίλη	κυρτή	κυρτή	κυρτή

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής είναι τα σημεία 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 δεν είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σ' αυτά η f δεν αλλάζει κυρτότητα, ενώ το σημείο 0 είναι θέση σημείου καμπής, αφού στο $O(0, f(0))$ υπάρχει εφαπτομένη της C_f και η f στο 0 αλλάζει κυρτότητα. Παρατηρούμε λοιπόν ότι από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής, θέση σημείου καμπής είναι μόνο το 0, εκατέρωθεν του οποίου η f'' αλλάζει πρόσημο.

Μέθοδος – Κριτήριο : Πως καταλήγουμε στο ποιες από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f αποτελούν τελικά σημεία καμπής της ;

Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0\in(\alpha,\beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$,

τότε το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Παρατηρήσεις :

- Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
  - (Αν f είναι κυρτή στο Δ) $\Leftrightarrow$ $f'\uparrow$ στο εσωτερικό του Δ.
  - (Αν f είναι κοίλη στο Δ) $\Leftrightarrow$ $f'\downarrow$ στο εσωτερικό του Δ.
- Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα Δ.
  - $\begin{cases} f''(x_0)=0 \\ f''\ \text{αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του}\ x_0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_0\ \text{θέση σ.κ.})$
  - Αν η f παρουσιάζει καμπή στο x_0, τότε $f''(x_0)=0$.
  - Αν $f''(x_0)\neq 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει καμπή στο x_0.
  - Αν $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f δεν παρουσιάζει καμπή στο Δ.
  - Πιθανές θέσεις σημείων καμπής είναι οι ρίζες της f'' στο Δ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΚΥΡΤΩΝ – ΚΟΙΛΩΝ & ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΜΠΗΣ

i. Βρίσκω το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
ii. Βρίσκω την $f'(x)$ και $f''(x)$
iii. Λύνω την εξίσωση $f''(x)=0$ και βρίσκω τα πρόσημα της $f''(x)$
iv. Κάνω πίνακα με το πρόσημο της $f''(x)$, στον οποίο θα συμπληρώσουμε την κυρτότητα της $f(x)$.
v. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα Δ_i στα οποία χωρίζεται το π.ο της f από τις ρίζες της $f''(x)$, ισχύει ότι :
   - Αν $f''(x)>0$ στο εσωτερικό του Δ_i τότε η f είναι κυρτή στο Δ_i (συμβ. $\cup$)
   - Αν $f''(x)<0$ στο εσωτερικό του Δ_i τότε η f είναι κοίλη στο Δ_i (συμβ. $\cap$)
vi. Αν η κυρτότητα της f αλλάζει σε ένα σημείο x_0, δηλαδή αν η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο στο x_0, τότε η f έχει σημείο καμπής στο x_0

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

i. $f(x)=3x^5-5x^4+2$ ii. $f(x)=xe^{1-x}$

iii. $f(x)=\begin{cases}-3x^2+1, x<0\\ -x^3+3x^2+1, x\geq 0\end{cases}$

Λύση :

i. $f(x)=3x^5-5x^4+2$, με $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=(3x^5-5x^4+2)'=15x^4-20x^3$,
$f''(x)=(15x^4-20x^3)'=60x^3-60x^2=60x^2(x-1)$ έχω :
$f''(x)=0 \Leftrightarrow 60x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow 60x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	- ∞	0		1	+ ∞
$60x^2$	+	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+
$f''(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\cap$		$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Η $f(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty,1]$, κυρτή στο $[1,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $A(1,f(1))\rightarrow A(1,0)$.

ii. $f(x)=xe^{1-x}$ με $D_f=\Re$, $f'(x)=(xe^{1-x})'=e^{1-x}-xe^{1-x}$,
$f''(x)=(e^{1-x}-xe^{1-x})'=-e^{1-x}-e^{1-x}+xe^{1-x}=xe^{1-x}-2e^{1-x}$, έχω :
$f''(x)=0 \Leftrightarrow xe^{1-x}-2e^{1-x}=0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Για τα πρόσημα της $f''(x)$ έχω :

$f''(x)>0 \Leftrightarrow xe^{1-x}-2e^{1-x}>0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)>0 \Leftrightarrow x>2$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow xe^{1-x}-2e^{1-x}<0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)<0 \Leftrightarrow x<2$

Άρα όπως φαίνεται και από το πινακάκι η $f(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$, κυρτή στο $[2,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $A(2, f(2)) \to A\left(2,\frac{2}{e}\right)$.

iii. $f(x)=\begin{cases}-3x^2+1, x<0\\ -x^3+3x^2+1, x\geq 0\end{cases}$

- Για $x<0$, $f(x)=-3x^2+1$, $f'(x)=-6x$, $f''(x)=-6<0$
- Για $x>0$, $f(x)=-x^3+3x^2+1$, $f'(x)=-3x^2+6x$, $f''(x)=-6x+6$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow -6x+6=0 \Leftrightarrow x=1$

Θα εξετάσουμε αν η $f(x)$ έχει εφαπτομένη στο $x_0=0$, δηλαδή αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-3x^2+1-1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3+3x^2+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2(-x+3)}{x}=0$$ άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f''(x)$	-		+	0	-
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$

Άρα όπως φαίνεται και από το πινακάκι η $f(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και στο $[1,+\infty)$, κυρτή στο $[0,1]$ και έχει σημεία καμπής τα $A(0, f(0)) \to A(0,1)$ και $B(1, f(1)) \to B(1,3)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x)=x^3+3x^2-6x$ ii. $f(x)=3x^5-10x^3+2x+1$

iii. $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$ iv. $f(x)=\ln(x^2+1)$

3) Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x)=e^x(x^2+1)$ ii. $f(x)=x-\ln(e^x+1)$

iii. $f(x)=\frac{e^x}{x}$ iv. $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$

4) Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x) = xe^{1-x}$
ii. $f(x) = x^2(2\ln x - 5)$
iii. $f(x) = e^{-x^2}$
iv. $f(x) = \text{εφ}x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
v. $f(x) = x|x|$
vi. $f(x) = \sqrt{|x|}$

5) Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4, x \le 0 \\ x^3 - 6x^2 + 4, x > 0 \end{cases}$
ii. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 - 2, x \le 1 \\ x^3 - 9x^2 + 13, x > 1 \end{cases}$
iii. $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1 & , \quad x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1 & , \quad x \ge 0 \end{cases}$
iv. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & , \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & , \quad x \ge 0 \end{cases}$

6) Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

7) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$ έχει για κάθε τιμή του $\alpha \in \Re$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.
ii. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $\mathrm{A}(x_1, f(x_1))$, $\mathrm{B}(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : Η f(x) ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

Για να δείξω ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει σημεία καμπής, υποθέτω ότι υπάρχει x_0 που είναι θέση σημείο καμπής, οπότε αν η $f(x)$ είναι και δυο φορές παραγωγίσιμη, από θεώρημα (ερώτηση 52) θα ισχύει $f''(x_0) = 0$ και με συνεπαγωγές καταλήγω σε άτοπο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) (Άσκηση 5 σελ. 279 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$, για την οποία ισχύει : $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.
Λύση : $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$ (1)
Η $f(x)$ δυο φορές παραγωγίσιμη άρα παραγωγίζω και τα δυο μέλη της (1) και έχω :
$(f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3)' = 0 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) - 2f'(x) + 2x = 0$ (2)

παραγωγίζω και τα δυο μέλη της (2) και έχω : $(2f(x)f'(x)-2f'(x)+2x)'=0 \Leftrightarrow$
$2f'(x)f'(x)+2f(x)f''(x)-2f''(x)+2=0 \Leftrightarrow 2(f'(x))^2+2f(x)f''(x)-2f''(x)+2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f'(x))^2+f(x)f''(x)-f''(x)+1=0$ (3). Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στη θέση x_0, δηλ. το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής, και η f δυο φορές παραγωγίσιμη άρα ισχύει : $f''(x_0)=0$, στην (3) για $x=x_0$ έχω :

$(f'(x_0))^2+f(x_0)f''(x_0)-f''(x_0)+1=0 \overset{f''(x_0)=0}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow (f'(x_0))^2+1=0$ που είναι άτοπο, άρα η f δεν έχει σημεία καμπής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι : $f^2(x)+e^x=3f(x)-\alpha^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όπου $0<\alpha\neq 1$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

11)Έστω μια συνάρτηση $f:(1,3)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f^2(x)+xf(x)+x^2-3x+1=0$ για κάθε $x\in(1,3)$. Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει καμπή.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

- **(Δεδομένο σημείο καμπής)** Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και στο x_0 η f έχει σημείο καμπής τότε ισχύει : $f''(x_0)=0$. Επειδή όμως αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία, αλλά όχι και ικανή, πρέπει για κάθε τιμή της παραμέτρου που θα βρούμε, να εξετάσουμε αν πράγματι το x_0 είναι θέση σημείου καμπής.
- **(Δεδομένη κυρτότητα)** Έστω η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Για να είναι:
  1. η f κυρτή στο Δ αρκεί να ισχύει $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$
  2. η f κοίλη στο Δ αρκεί να ισχύει $f''(x)\leq 0$ για κάθε $x\in\Delta$

  και η ισότητα και στις δυο περιπτώσεις να ισχύει για διακεκριμένες τιμές.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^5-(4\beta+2)x^3+(\alpha-1)x+1$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $\mathrm{A}(1,-4)$.

Λύση : $f'(x)=5\alpha x^4-3(4\beta+2)x^2+\alpha-1$, $f''(x)=20\alpha x^3-6(4\beta+2)x$

Η $f(x)$ έχει σημείο καμπής στη θέση $x_0=1$ άρα : $f''(1)=0$ (1)

Το σημείο καμπής $\mathrm{A}(1,-4)$ είναι σημείο της C_f άρα : $f(1)=-4$ (2)

(1) και (2) : $\begin{cases} f''(1)=0 \\ f(1)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\alpha-6(4\beta+2)=0 \\ \alpha-(4\beta+2)+\alpha-1+1=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\alpha-24\beta=12 \\ \alpha-4\beta-2+\alpha=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha - 6\beta = 3 \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$. Τέλος επειδή η συνθήκη για το σ.κ. $f''(1) = 0$ είναι απαραίτητη όχι όμως και ικανή, πρέπει να ελέγξω αν οι παραπάνω τιμές είναι δεκτές.
Έχω : $f''(x) = 20\alpha x^3 - 6(4\beta + 2)x \Leftrightarrow f''(x) = 60x^3 - 60x$,
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x = 0 \Leftrightarrow 60x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, ή, x = 1, ή, x = -1$

x	- ∞	-1		0		1	+ ∞
$60x$	-		-	0	+		+
$x^2 - 1$	+	0	-		-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Άρα όπως φαίνεται και από το πινακάκι η $f(x)$ έχει σημείο καμπής στη θέση $x_0 = 1$ και άρα οι τιμές των α,β είναι δεκτές.

13)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου α, η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\Re$.
Λύση :
$f'(x) = 4x^3 - 6\alpha x^2 + 12x + 2$, $f''(x) = 12x^2 - 12\alpha x + 12$.
Για να είναι η $f(x)$ κυρτή στο $\Re$, πρέπει να ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12\alpha x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - \alpha x + 1 \geq 0$, για το τριώνυμο που πρόεκυψε πρέπει να ισχύει : $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \in [-2,2]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

14)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(-1,4)$.

15)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^2 x^3 - 6\alpha x^2 + 5x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(2,3)$.

16)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^2 x^4 - 4\alpha x^3 + 6(2\alpha - 1)x^2 - 4x + 11$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η C_f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 1$.

17)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β και γ, ώστε η C_f να έχει στο $x_1 = -1$ ακρότατο το 10 και στο $x_2 = 1$ να έχει σημείο καμπής.

18)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 + \lambda x^3 + (3\lambda - 9)x^2 - 7x + 4$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ, η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

19)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^4 + 2(\lambda - 3)x^3 + 6\lambda x^2 - 3x + 5$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ, η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

- Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x_0 \in \Delta$ η εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ της C_f στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται κάτω από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει ότι : $f(x) \geq \lambda x + \beta$.
- Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x_0 \in \Delta$ η εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ της C_f στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται πάνω από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει ότι : $f(x) \leq \lambda x + \beta$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f'\left(x^2+1\right) > e-1$.
iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$.
iv. Να αποδείξετε ότι $e^x \geq (e-1)x + \ln x + 1$ για κάθε $x > 0$.
v. Να λύσετε την εξίσωση : $\dfrac{f(x)-1}{e-1} = x$.
vi. Να λύσετε την εξίσωσης : $f\left(e^x\right) + e^x = e^{x+1} + 1$

Λύση :

i. $f(x) = e^x - \ln x$, με $D_f = (0,+\infty)$, $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in D_f = (0,+\infty)$, άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ συνεπώς η $f(x)$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

ii. Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει $x^2+1 \in (0,+\infty)$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$,έτσι : $f'\left(x^2+1\right) > e-1 \Leftrightarrow f'\left(x^2+1\right) > f'(1)$, η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ άρα η $f' \uparrow$, οπότε,
$f'\left(x^2+1\right) > f'(1) \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2+1>1 \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

iii. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(1, f(1))$, τότε $(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y - e = (e-1)(x-1) \Leftrightarrow y - e = ex - e - x + 1 \Leftrightarrow y = ex - x + 1$

iv. Η $f(x)$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y = ex - x + 1$, με εξαίρεση το σημείο επαφής $\mathrm{A}(1, f(1))$. Δηλαδή για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει :
$f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq ex - x + 1 \Leftrightarrow e^x - \ln x \geq ex - x + 1 \Leftrightarrow e^x \geq (e-1)x + \ln x + 1$.

v. Η εξίσωση ορίζεται για $x \in (0,+\infty)$ και έχουμε : $\dfrac{f(x)-1}{e-1} = x \Leftrightarrow f(x) = (e-1)x + 1$, όμως η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y = ex - x + 1$, με εξαίρεση το σημείο επαφής $\mathrm{A}(1, f(1))$. Δηλαδή για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $f(x) \geq (e-1)x + 1$ και το «=» μόνο για $x = 1$. Τελικά : $f(x) = (e-1)x + 1 \Leftrightarrow x = 1$.

vi. Η εξίσωση ορίζεται για $e^x \in (0,+\infty) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ και έχουμε : $f\left(e^x\right)+e^x = e^{x+1}+1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f\left(e^x\right) = e^{x+1} - e^x + 1 \Leftrightarrow$
$f\left(e^x\right) = e^x(e-1)+1 \overset{e^x = y > 0}{\Leftrightarrow} f(y) = (e-1)y+1 \overset{v.}{\Leftrightarrow} y = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

21)Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f της συνάρτησης $f(x)=e^x(x^2+3)$ σε οποιοδήποτε σημείο της δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f εκτός του σημείου επαφής.

22)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+x^4$.
i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(0, f(0))$.
iii. Να αποδείξετε ότι $e^{2x} \geq 1+2x-x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

23)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2-4x+6)e^{x-1}$.
i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$.
iii. Να αποδείξετε ότι $e^{x-1} \geq \dfrac{x+2}{x^2-4x+6}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

24)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{\pi}-2x^2-x\ln x$.
i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$.
iii. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{\pi}-x\ln x \leq 2x^2-6x+4$ για κάθε $x>0$.

25)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x+a\ln x\right)^2$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία : $(\zeta): 8x-2y+2011=0$.
i. Να βρείτε τον αριθμό α και την εξίσωση της (ε)
ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
iii. Να αποδείξετε ότι $3+\left(x+\ln x\right)^2 \geq 4x$ για κάθε $x>0$.

26)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln\left(\ln x\right)$.
i. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=e$.
iii. Να δείξετε ότι $\ln\left(\ln x\right) \leq \dfrac{x}{e}-1$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$.
iv. Να λυθεί η εξίσωση $e\ln x - e^{\frac{x}{e}} = 0$ στο διάστημα $(1,+\infty)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΥΠΑΡΞΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΜΠΗΣ

- Για να δείξω ότι η f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα και ότι η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας.
- Για να δείξω ότι η f έχει ακριβώς δυο σημείο καμπής, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες και ότι η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-x)$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει δυο, ακριβώς, σημεία καμπής.

Λύση :

Αρχικά πρέπει $e^x-x>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτό αποδεικνύεται από τη βασική ανισότητα : $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$. Αν θέσουμε όπου x το $e^x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε : $\ln e^x\le e^x-1\Leftrightarrow x\le e^x-1\Leftrightarrow e^x\ge x+1$, για κάθε $x\in\Re$, και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $e^x=1\Leftrightarrow x=0$. Άρα $e^x>x\Leftrightarrow e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (καθώς $x+1>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

Τελικά $D_f=\mathbb{R}$ και $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$, $f''(x)=\dfrac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\dfrac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}$. Για να δείξω ότι η f έχει δυο, ακριβώς, σημεία καμπής, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες όπου και αλλάζει το πρόσημο της f''.

$f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}=0\Leftrightarrow 2e^x-xe^x-1=0$. Έστω $g(x)=2e^x-xe^x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή $(e^x-x)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες. (εύρεση πλήθους ριζών για τη $g(x)=0$)

$g'(x)=2e^x-e^x-xe^x=e^x(1-x)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	γν. αύξουσα	ο.μ.	γν.φθίνουσα

Άρα $g'(x)>0$ για $x\in(-\infty,1)$ και f συνεχής στο 1, άρα $g\uparrow(-\infty,1]$

$g'(x)<0$ για $x\in(1,+\infty)$ δηλ. $g\downarrow[1,+\infty)$

Για το σύνολο τιμών έχουμε :

- g γν. αύξουσα και συνεχής στο $\mathrm{A}_1=(-\infty.1]$, άρα $g(\mathrm{A}_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),g(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=-1$

καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)\overset{-\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{\dfrac{1}{e^x}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^{-x}}\right)\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{-e^{-x}}\right)=0$.

Άρα : $g(A_1)=(-1,e-1]$, το $0\in g(A_1)=(-1,e-1]$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_1=(-\infty,1]$.
Δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $x_1\in A_1=(-\infty,1]$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0$.

- g γν. φθίνουσα και συνεχής στο $A_2=[1,+\infty)$, άρα $g(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(1)\ \right]$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x(2-x)-1\right)=+\infty\cdot(-\infty)-1=-\infty$$

Άρα : $g(A_2)=(-\infty,e-1]$, το $0\in g(A_2)=(-\infty,e-1]$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_2=[1,+\infty)$.
Δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $x_2\in A_2=[1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_2)=0$.

Τελικά έχουμε :

- Αν $x<1$, Τότε για κάθε :

$$x<x_1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(x_1) \Leftrightarrow g(x)<0 \Rightarrow f''(x)<0$$
$$x>x_1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(x_1) \Leftrightarrow g(x)>0 \Rightarrow f''(x)>0$$

- Αν $x>1$, Τότε για κάθε :

$$x<x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(x_2) \Leftrightarrow g(x)>0 \Rightarrow f''(x)>0$$
$$x>x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(x_2) \Leftrightarrow g(x)<0 \Rightarrow f''(x)<0$$

x	- ∞	x_1		1	x_2	+ ∞
$f''(x)$	-	0	+	+	0	-
f	κοίλη	Σ.Κ.	κυρτή	κυρτή	Σ.Κ.	κοίλη

Τελικά όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα η f παρουσιάζει ακριβώς δυο σημεία καμπής, στο x_1 και στο x_2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-x+e^x-\dfrac{x^2}{2}$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

29) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln^2 x-x\ln x$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(1,2)$ στο οποίο συνάρτηση f παρουσιάζει καμπή.

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x(1-\ln x)$. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει καμπή σε ένα ακριβώς σημείο $x_0=\alpha$ το οποίο ανήκει στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ Θ.Μ.Τ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

31) Έστω μια κυρτή συνάρτηση $f:\Delta \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$.

ii. $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$.

Λύση :

i. Αν $\alpha=\beta$, τότε $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow f(\alpha)+f(\alpha)\geq 2f\left(\dfrac{\alpha+\alpha}{2}\right)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2f(\alpha)\geq 2f(\alpha)\Leftrightarrow f(\alpha)\geq f(\alpha)$ όπου ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$ τότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$.

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$

- f συνεχής στο $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$
- f παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\dfrac{\beta-\alpha}{2}}.$$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

- f συνεχής στο $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$
- f παραγωγίσιμη στο $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{f(\beta)-f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\dfrac{\beta-\alpha}{2}}$$

Όμως η f κυρτή στο $\Re$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα :

$$\xi_1<\xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \overset{\beta-\alpha>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)<f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)>2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Αν $\alpha>\beta$ η απόδειξη είναι ανάλογη.

Άρα για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$ ισχύει : $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

ii. Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[x,x+1]$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[x,x+1]$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$. Όμως $\xi\in(x,x+1)$ άρα $\xi<x+1$ (1). Θα πρέπει να πάρω f' και στα δυο μέλη της (1), πρέπει όμως να γνωρίζω τη μονοτονία της f'. Όμως η f κυρτή στο $\Re$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι η σχέση (1) θα γίνει : $(1):\xi<x+1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

32) Έστω μια κοίλη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\leq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

ii. $f'(x)<f(x)-f(x-1)<f'(x-1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

33) Έστω $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι $f'(\alpha)<\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, για κάθε $x\in(\alpha,+\infty)$.

34) Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι κοίλη. Να δείξετε ότι $f(x)+f(3x)<2f(2x)$, για κάθε $x>0$.

35) Έστω μια συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(0)=0$ και $f'(x)>1$ για κάθε $x>0$. Να δείξετε ότι $x<f(x)<xf'(x)$, για κάθε $x>0$.

36) Έστω μια κυρτή συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$

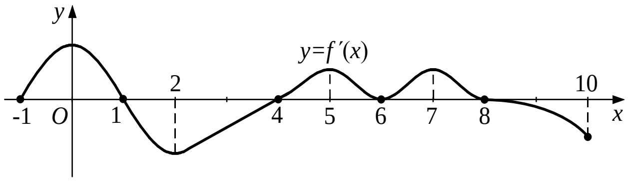
ii. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x$. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

iii. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta}{\alpha+\beta}\geq\ln\frac{\alpha+\beta}{2}$ για κάθε $\alpha,\beta>0$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

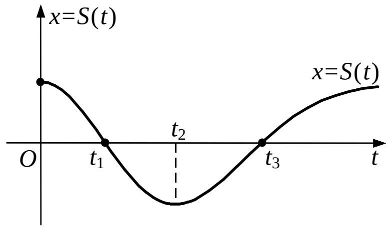
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

37) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης *f* στο διάστημα $[-1,10]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η *f* είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

38) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση *C* της συνάρτησης θέσεως $x=S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα. Αν η *C* παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:



i. Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.
ii. Πότε η κίνηση του κινητού είναι επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη.

39) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $e^{f(x)}+f(x)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.
ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(0,f(0))$
iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
iv. Να αποδείξετε ότι $xf'(x)\le f(x)\le \frac{x}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
v. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$, ώστε : $2f(\xi)=(\xi-1)\sqrt{e^{\xi}}$

40)
i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x-x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln^2 x+2x\ln x+x^2-3$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.
iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x_0=1$
iv. Να δείξετε ότι : $x+\ln x>\sqrt{4x-3}$ για κάθε x>1.

41) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(1-x)-e^{-x}+1$
i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

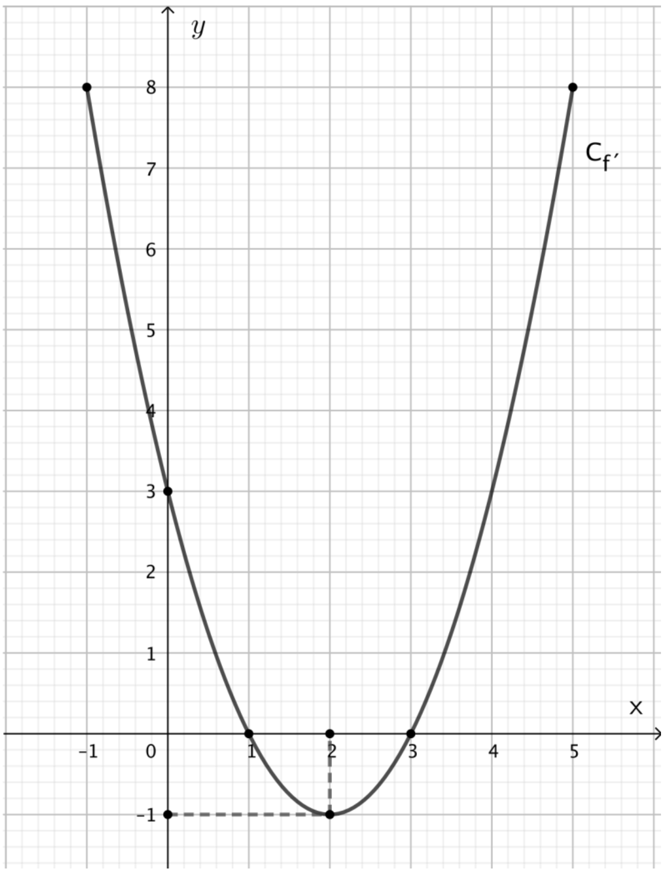
42)
i. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2-x-2\ln x$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο (1,2)
ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ στο οποίο η συνάρτηση $g(x)=\ln^2 x-x\ln x$ παρουσιάζει καμπή.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.8

ΘΕΜΑ 2 #35172
Δίνεται η συνάρτηση f με f(x) = ln(1 + x^2).
α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.(Μονάδες 12)
β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της. (Μονάδες 13)

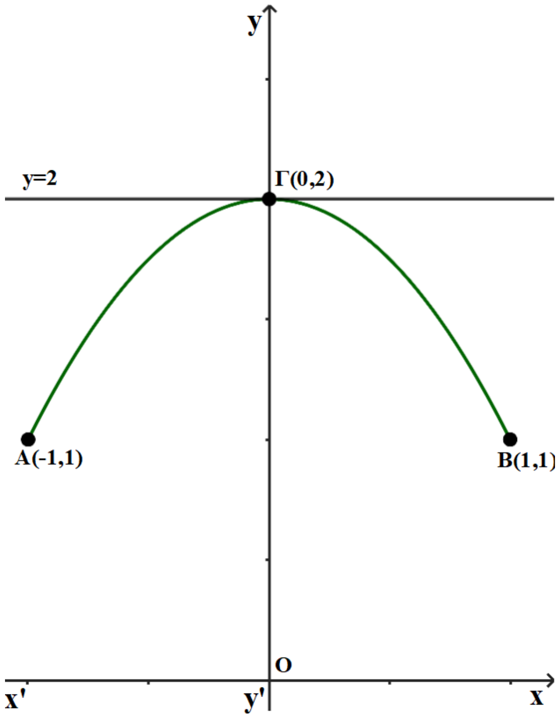
ΘΕΜΑ 2 #34438
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f και να λύσετε τις εξισώσεις: $f'(x) = 0$ και $f''(x) = 0$. (Μονάδες 8)
β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 9)
γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 #26736
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1,5]$.
α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' είναι το σημείο $A(2,-1)$, με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$ και κυρτή στο $[2,5]$. (Μονάδες 10)
β) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0 = 2$; (Μονάδες 06)
γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2) - 1 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_o = 2$.
(Μονάδες 09)



ΘΕΜΑ 2 #32799

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2$. Αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(1,1)$ και $\Gamma(0,2)$ τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: $1\le f'(x)\le 2$, για κάθε $x\in[-1,1]$. (Μονάδες 07)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 08)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 #31527

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)=x^4+3x^2-8,\ x\in\mathbb{R}}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα. (Μονάδες 10)

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης $\mathrm{C_f}$ της f στο σημείο $\mathrm{A(1,\ f(1))}$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε). (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της $\mathrm{C_f}$, διαφορετικό από το Α, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε). (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3 #33994

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)=0.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$. (Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$. (Μονάδες 08)

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο $(0,g(0))$. (Μονάδες 04)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι κυρτή. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4 #31550

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0\in(\frac{1}{2},1)$ το οποίο είναι μοναδικό. (Μονάδες 7)

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_0}+x_0$. (Μονάδες 6)

δ) η εξίσωση $f(x)=2$ είναι αδύνατη. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 #31549

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}, x>0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023}>2023^{2022}$. (Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)

δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021,2022]$ και $[2022,2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022)<f(2021)+f(2023)$. (Μονάδες 7)

Δίνεται $e\simeq 2,71$.

ΘΕΜΑ 4 #27667

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\frac{x^2}{2}+2023, x\in\mathbb{R}$.

1) Να αποδείξετε ότι:
   i. η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 05)
   ii. το σύνολο τιμών της f' είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)
2) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η εξίσωση $e^x+x=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ. (Μονάδες 05)
3) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η συνάρτηση $g(x)=\alpha x-f(x)$ με $x\in\mathbb{R}$, έχει μέγιστη τιμή την $\rho f'(\rho)-f(\rho)$. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4 #25745

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$, $f'(1)=0$, $f(0)=f(2)$ και

$$(f'(x))^2+f(x)\cdot f''(x)<0, \text{ για κάθε } x\in(0,2)$$

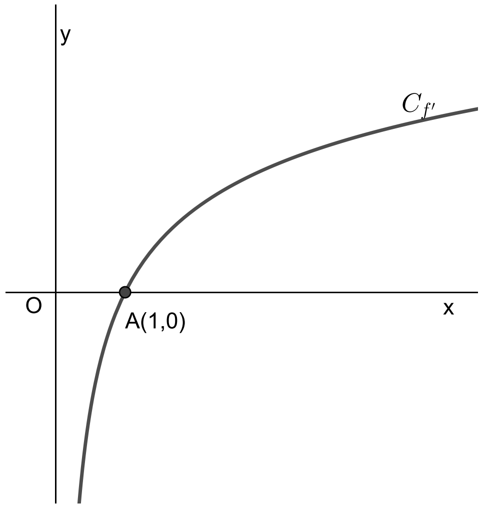
α) Να αποδείξετε ότι:
   i. $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$. (Μονάδες 5)
   ii. $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$. (Μονάδες 5)

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 #27320

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται στο (0,+ ∞) η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το (0,+ ∞). Δίνεται επίσης ότι η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο (0,+ ∞) με $\lim_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$.



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f.
(Μονάδες 09)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1ον: «Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2ον: «Υπάρχει μοναδικό κ∈(0,+ ∞) τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Μ(κ, $f(\kappa)$) να ισούται με 2».

Ποιοί από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της f στο πεδίο ορισμού της; Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4 #24760

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - \lambda x,\ x > 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1,e)$ με $f'(x_0) = 0$.
(Μονάδες 6)

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,e]$. (Μονάδες 6)

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_o που είναι το $e^{x_0}(1-x_0)+1-\ln x_0$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #23312

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2,2]$ τέτοια ώστε:

f συνεχής στο $[-2,2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ και

$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$, για κάθε $x \in [-2,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής. (Μονάδες 08)

β) Αν $f(0) = 3$,

i. Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 = 4 - x^2$, για κάθε $x \in [-2,2]$ και κατόπιν ότι $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2,2]$. (Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4 #23531

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - lnx - 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0 \in (0, 1)$ με $f(x_0) < 0$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$. (Μονάδες 9)