2.5Α ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Α. ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

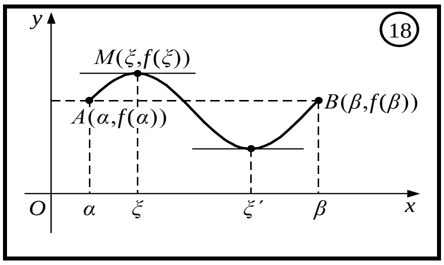
39.ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE (2007 Β΄, 2012 Β΄, 2020 Ν.Σ. ΕΠΑΝ.)
Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση :

Το θεώρημα του Rolle διατυπώνεται ως εξής :

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α,β) **και**
- $f(\alpha)=f(\beta)$



τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιο, ώστε** $f'(\xi)=0$**.**

Γεωμετρική Ερμηνεία :

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ [α,β]

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi\in(\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

i. $f(x)=x^2-6x+2$, $[-1,7]$

ii. $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3 & ,x<1 \\ 8x-2x^2 & ,x\geq 1 \end{cases}$ $[-3,3]$

Λύση :

i. Θ. Rolle για την $f(x)=x^2-6x+2$ στο $[-1,7]$ έχω :

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-1,7]$ ως πολυωνυμική
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,7)$ με $f'(x)=2x-6$
- $f(-1)=9$ και $f(7)=9$ άρα $f(-1)=f(7)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,7)$.
Πράγματι : $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3\in(-1,7)$

ii. Πρώτα πρέπει να εξετάσω ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμοτητα της $f(x)$ στο $x_0 = 1$. Έχω :

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+2x+3) = 6$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(8x-2x^2) = 6$

$f(1) = 6$, άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Επίσης :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x+3-6}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{8x-2x^2-6}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-2x^2+8x-6}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-2(x-1)(x-3)}{x-1} = 4$$

Άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Οπότε Θ. Rolle για την $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+3 & ,x<1 \\ 8x-2x^2 & ,x\geq 1 \end{cases}$ στο $[-3,3]$ έχω :

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3,3]$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$
- $f(-3) = 6$ και $f(3) = 6$ άρα $f(-3) = f(3)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-3,3)$.

Πράγματι :

Για $x<1$ $f'(x) = 2x+2$ άρα : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in (-3,3)$

Για $x>1$ $f'(x) = 8-4x$ άρα : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8-4x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in (-3,3)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

i. $f(x) = x^2+2x+1$, [-2,0]

ii. $f(x) = \ln(x+1)$, [0,1]

iii. $f(x) = 1+\eta\mu 3x$, [0,π]

iv. $f(x) = \sqrt{x^2-2x+1}$, [0,2]

v. $f(x) = \begin{cases} x^2+4x-12 & ,x\leq -2 \\ 4x^2+16x & ,x>-2 \end{cases}$ $[-6,0]$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f'(x) = 0$ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ $f(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-\alpha}$ $\alpha \in \Re$ και $\alpha > 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον x΄x . (2000Β΄)

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$. Για να είναι $(\varepsilon)//x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)=0$. Άρα Θ. Rolle για την $f(x)$ στο $[1,2]$.

- $f(x)$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών
- $f(x)$ παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων
- $f(1)=\dfrac{1-3+2}{1-\alpha}=0$, $f(2)=\dfrac{4-6+2}{1-\alpha}=0$ άρα $f(1)=f(2)$

Οπότε από Θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=xe^{x-1}+ax^2-(a+1)x$, με $x,a \in \Re$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1)

5) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\eta\mu x \cdot \ln(3-x)+x^3-4x+5$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,2)$, στο οποίο η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+\beta x \ , & -1 \le x < 0 \\ x^3+\gamma \ , & 0 \le x < 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα α,β,γ ώστε για την f να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [-1,1].

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)\ln x$. Να δείξετε ότι :
   i. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη στον x΄x. (η εξίσωση f ΄(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2)).
   ii. Η εξίσωση $x^x=e^{2-x}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (1,2).

8) Αν $\alpha^2+\alpha=\beta$, να δείξετε ότι υπάρχει στο διάστημα (-1,1) σημείο x_0 τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f, όπου $f(x)=(\alpha^2-\beta)x^3+(\beta^2-\alpha)x^2+\alpha x+\beta$ στο σημείο με τετμημένη x_0 είναι παράλληλη στον άξονα των x΄x.

ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ – ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ Ή ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η λύση πολλών προβλημάτων απαιτεί μια διαδικασία αντίστροφη της παραγώγισης.
Πιο συγκεκριμένα μας δίνεται μια συνάρτηση f και ζητείται να βρεθεί μια παραγωγίσιμη συνάρτηση F, που η παράγωγος της να δίνει την f. Δηλ. $f(x) = F'(x)$, $x \in \Delta$.
Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αντιπαραγώγιση και η συνάρτηση F παράγουσα ή αρχική της f στο Δ.

ΕΥΡΕΣΗ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ)

Στην προσπάθεια να βρούμε την αρχική συνάρτηση, πρέπει να ελέγχουμε αν εμφανίζεται παράγωγος γινομένου, πηλίκου ή παράγωγος σύνθετης συνάρτησης. Ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι εξής παρατηρήσεις :

- $0 = (c)'$
- $c = (cx)'$
- $x^{\alpha} = \left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'$, $\alpha \neq -1$
- $\dfrac{1}{x} = (\ln|x|)'$, $x \neq 0$
- $\dfrac{1}{x^2} = \left(-\dfrac{1}{x}\right)'$, $x \neq 0$
- $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = (\sqrt{x})'$
- $\eta\mu x = (-\sigma\upsilon\nu x)'$
- $\sigma\upsilon\nu x = (\eta\mu x)'$
- $e^x = (e^x)'$
- $\alpha^x = \left(\dfrac{\alpha^x}{\ln a}\right)'$
- $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = (\varepsilon\phi x)'$
- $\dfrac{1}{\eta\mu^2 x} = (-\sigma\phi x)'$

- $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$
- $f(x)+x\cdot f'(x)=\left(x\cdot f(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\left(\ln|f(x)|\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'$
- $e^{f(x)}\cdot f'(x)=\left(e^{f(x)}\right)'$
- $f^{\nu}(x)\cdot f'(x)=\left(\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right)'$ π.χ. $f(x)\cdot f'(x)=\left(\dfrac{f^2(x)}{2}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\sqrt{f(x)}\right)'$
- $\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)=\left(\eta\mu f(x)\right)'$
- $\eta\mu f(x)\cdot f'(x)=\left(-\sigma\upsilon\nu f(x)\right)'$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) Να βρείτε μια παράγουσα F των παρακάτω συναρτήσεων :
(Παράγουσες Βασικών Συναρτήσεων)

i. $f(x)=3x^2$

ii. $f(x)=x^3+12x^2-6x-5$

iii. $f(x)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{x}+2e^x$, $x>0$

iv. $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{5}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+2\eta\mu x-3\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

v. $f(x)=\dfrac{2x^3+x-1}{x^2}$, $x>0$

Λύση :

i. $F(x)=3\dfrac{x^{2+1}}{2+1}=3\dfrac{x^3}{3}=x^3,\ x\in\mathbb{R}$

ii. $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+12\dfrac{x^3}{3}-6\dfrac{x^2}{2}-5x\Leftrightarrow F(x)=\dfrac{x^4}{4}+4x^3-3x^2-5x\ ,x\in\mathbb{R}$.

iii. $F(x)=3\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+2e^x \Leftrightarrow F(x)=3\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2e^x \Leftrightarrow$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} F(x)=3\ln x+\frac{1}{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2e^x\,,\ x>0 \qquad \left(\pi\rho o\sigma o\chi\acute{\eta}:\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\right)$

iv. $F(x)=3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-5\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x)=3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-5\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x)=6\sqrt{x}-5\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x \qquad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$\left(\pi\rho o\sigma o\chi\acute{\eta}:\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}=3x^{-\frac{1}{2}}\right)$

v. Είναι : $f(x)=\frac{2x^3+x-1}{x^2}=2x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$, άρα :

$F(x)=x^2+\ln|x|+\frac{1}{x}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}F(x)=x^2+\ln x+\frac{1}{x} \qquad x>0.$

10) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

<u>(Παράγουσες Συναρτήσεων με εφαρμογή κανόνων παραγώγισης)</u>

i. $f(x)=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x$

ii. $f(x)=\frac{2e^x-xe^x}{x^3}\ ,\ x>0$

iii. $f(x)=\frac{e^x(1+x\ln x)}{x}\ ,\ x>0$

<u>Λύση :</u>

i. $f(x)=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x=(x^2)'\eta\mu x+x^2(\eta\mu x)'=(x^2\cdot\eta\mu x)'$

Άρα : $F(x)=x^2\cdot\eta\mu x\ ,\ x\in\mathbb{R}$.

ii. $f(x)=\frac{2e^x-xe^x}{x^3}=\frac{2xe^x-x^2e^x}{x^4}=-\frac{x^2e^x-2xe^x}{x^4}=\left(-\frac{e^x}{x^2}\right)'$

Άρα : $F(x)=-\frac{e^x}{x^2} \qquad x>0.$

iii. $f(x)=\frac{e^x(1+x\ln x)}{x}=\frac{e^x+e^x x\ln x}{x}=\frac{e^x}{x}+e^x\ln x=e^x\frac{1}{x}+e^x\ln x=(e^x\ln x)'$

Άρα : $F(x)=e^x\ln x \qquad x>0.$

11) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :
(Παράγουσες Σύνθετων Συναρτήσεων)

i. $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

ii. $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^6 \cdot (2x + 3)$

iii. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x + 2017}$

iv. $f(x) = \dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x}}$

Λύση :

i. $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} = (-\sigma\upsilon\nu x)' \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(-e^{\sigma\upsilon\nu x}\right)'$, άρα : $F(x) = -e^{\sigma\upsilon\nu x} \quad x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^6 \cdot (2x + 3) = (x^2 + 3x + 5)^6 \cdot (x^2 + 3x + 5)' = \left(\dfrac{\left(x^2 + 3x + 5\right)^7}{7}\right)'$

Άρα : $F(x) = \dfrac{\left(x^2 + 3x + 5\right)^7}{7} \quad x \in \mathbb{R}$.

iii. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x + 2017} = \dfrac{\left(x^2 - x + 2017\right)'}{x^2 - x + 2017} = \left(\ln\left|x^2 - x + 2017\right|\right)'$

Άρα : $F(x) = \ln\left|x^2 - x + 2017\right| \quad x \in \mathbb{R}$.

iv. $f(x) = \dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x}} = \dfrac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x}} = \dfrac{2\eta\mu x \cdot (\eta\mu x)'}{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x}} = \dfrac{\left(1 + \eta\mu^2 x\right)'}{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x}} =$

$= 2\dfrac{\left(1 + \eta\mu^2 x\right)'}{2\sqrt{1 + \eta\mu^2 x}} = \left(2\sqrt{1 + \eta\mu^2 x}\right)'$

Άρα : $F(x) = 2\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} \quad x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

12) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = x$

ii. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $x > 0$

iii. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

iv. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x > 0$

13) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = x^3$

ii. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, $x > 0$

iii. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

iv. $f(x) = x\sqrt{x}$

14) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\frac{1}{x}+\sigma\upsilon\nu x,\ x>0$

ii. $f(x)=2e^x-\frac{3}{\eta\mu^2 x}\ ,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

iii. $f(x)=3^{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x}}-2,\ x>0$

15) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\eta\mu x-\frac{1}{x^2}+e^{-x},\ x>0$

ii. $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\ ,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

iii. $f(x)=2^x-\frac{1}{\eta\mu^2 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

16) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\frac{3x^3+2x-1}{x^2},\ x>0$

ii. $f(x)=\frac{(3x-2)^2}{x^2}\ ,\ x<0$

iii. $f(x)=\frac{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^2 x-2}{\eta\mu^2 x},\ x\in(0,\pi)$

17) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x$

ii. $f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{e^x}$

iii. $f(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2},\ x>0$

iv. $f(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$

v. $f(x)=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

vi. $f(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$

18) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=(2x-3)(x^2-3x+1)^2$

ii. $f(x)=(3x^2-2)(x^3-2x+1)^2$

iii. $f(x)=\frac{x}{(x^2+1)^3}$

iv. $f(x)=\frac{3x}{(x^2+3)^2}$

v. $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$

vi. $f(x) = x\sqrt{3x^2+2}$

vii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x}$

viii. $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

ix. $f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x - 5e^{2x}$

x. $f(x) = 2\eta\mu 3x - 5\cdot 2^x$

xi. $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

xii. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

xiii. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

xiv. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x>1$

xv. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $x>-3$

xvi. $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

xvii. $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

19) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη. Να βρείτε μια παράγουσα G των συναρτήσεων :

i. $g(x) = (x^2+3)f'(x) + 2xf(x)$

ii. $g(x) = xf'(x) + f(x)$

iii. $g(x) = f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu x$

iv. $g(x) = \dfrac{(x-1)f'(x) - f(x)}{(x-1)^2}$, $x>1$

v. $g(x) = \dfrac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$

vi. $g(x) = 2f(x)f'(x) + 3x^2$

vii. $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} + f'(x)e^{f(x)}$, $f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$

viii. $g(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} - \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$, $f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$

ix. $g(x) = f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu f(x) + f(x) + xf'(x)$

x. $g(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - f'(x)\cdot\eta\mu f(x)$, $x>0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f(x)=0$ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ Θ.ROLLE ΣΕ ΜΙΑ ΑΡΧΙΚΗ $F(x)$ ΤΗΣ $f(x)$

Η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) τρόποι :

i. Η εξίσωση έχει μια προφανή ρίζα ή
ii. Θ. Bolzano για την f στο [α,β] ή
iii. Σύνολο τιμών της f περιέχει το 0

ή

iv. **Θ. Rolle για την F (παράγουσα της f) στο [α,β]**

Η f(x)=0 έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο (α,β) τρόποι :

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την f στα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

Ή

Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την F στα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

ΓΕΝΙΚΑ

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση σε διάστημα Δ και δεν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano, προφανής ρίζα ή σύνολο τιμών, τότε μπορούμε να βρούμε μια αρχική ή παράγουσα συνάρτηση της $f(x)$ (δηλ. μια συνάρτηση $F(x)$ για την οποία ισχύει $F'(x)=f(x)$) και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε Θ.Rolle για την $F(x)$ στο Δ.

Αν ζητείται να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε να ισχύει μια σχέση, εργαζόμαστε ως εξής :

1) Βάζουμε όπου ξ το x μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και θεωρώ καινούρια συνάρτηση $g(x)$, ώστε να έχουμε εξίσωση $g(x)=0$.

2) Αν δεν εφαρμόζεται το Θ. Bolzano για τη $g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε βρίσκουμε μια αρχική συνάρτηση $g(x)$, δηλαδή μια συνάρτηση $G(x)$ τέτοια ώστε $G'(x)=g(x)$

3) Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για τη $G(x)$ στο $[\alpha,\beta]$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20)Να δείξετε ότι η εξίσωση : $4x^3+3x^2-8x=4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,2)$.

Λύση :

Έχω $4x^3+3x^2-8x=4 \Leftrightarrow 4x^3+3x^2-8x-4=0$ έστω $f(x)=4x^3+3x^2-8x-4$ θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,2)$. Αρχικά εξετάζω αν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano για την $f(x)$, έχω :

- $f(x)$ συνεχής στο $[-1,2]$ ως πολυωνυμική
- $f(-1)=3$, $f(2)=24$ άρα $f(-1)\cdot f(2)=72>0$. Άρα δεν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano συνεπώς θα εφαρμόσω Θ.Rolle σε μια αρχική της $f(x)$. Έχω : $F(x)=x^4+x^3-4x^2-4x$ είναι αρχική της $f(x)$ (αφού ισχύει : $F'(x)=f(x)$). Δηλαδή θα δείξω ότι η εξίσωση $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,2)$. Θ.Rolle για την $F(x)$ στο $[-1,2]$.
- $F(x)$ συνεχής στο $[-1,2]$ ως πολυωνυμική
- $F(x)$ παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$
- $F(-1)=0$, $F(2)=0$, άρα από Θ.Rolle η εξίσωση $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,2)$.

21)Αν $8\alpha+3\beta=0$ να δείξετε ότι η εξίσωση : $4\alpha x^3+3(2\alpha+\beta)x^2+2(2\beta+\alpha)x=\beta$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2)

Λύση :

Έχω $4\alpha x^3+3(2\alpha+\beta)x^2+2(2\beta+\alpha)x=\beta \Leftrightarrow 4\alpha x^3+3(2\alpha+\beta)x^2+2(2\beta+\alpha)x-\beta=0$ έστω $f(x)=4\alpha x^3+3(2\alpha+\beta)x^2+2(2\beta+\alpha)x-\beta$ θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$. Αρχικά εξετάζω αν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano για την $f(x)$, έχω :

- $f(x)$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική
- $f(1)=12\alpha+6\beta$, $f(2)=60\alpha+19\beta$ παρατηρώ ότι δεν μπορώ να βγάλω κάποιο συμπέρασμα για το πρόσημο των τιμών $f(1), f(2)$ αλλά ούτε και για το γινόμενο τους $f(1)\cdot f(2)$. Άρα δεν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano συνεπώς θα εφαρμόσω Θ.Rolle σε μια αρχική της $f(x)$. Έχω : $F(x)=\alpha x^4+(2\alpha+\beta)x^3+(2\beta+\alpha)x^2-\beta x$ είναι αρχική της $f(x)$ (αφού ισχύει : $F'(x)=f(x)$). Δηλαδή θα δείξω ότι η εξίσωση $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$. Θ.Rolle για την $F(x)$ στο $[1,2]$.
- $F(x)$ συνεχής στο $[-1,2]$ ως πολυωνυμική
- $F(x)$ παραγωγίσιμη στο $(1,2)$
- $F(1)=\alpha+2\alpha+\beta+2\beta+\alpha-\beta=4\alpha+2\beta$,
  $F(2)=32\alpha+8\beta+8\beta+4\alpha-2\beta=36\alpha+14\beta$, πρέπει
  $F(1)=F(2) \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=36\alpha+14\beta \Leftrightarrow 32\alpha+12\beta=0 \Leftrightarrow 8\alpha+3\beta=0$ που ισχύει από εκφώνηση. Άρα από Θ.Rolle η εξίσωση $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

22)Να δειχθεί ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα :

i. $4x^3+9x^2-4=0$ στο (-2,1)

ii. $(3x^2-1)\eta\mu x+(x^3-x)\sigma\upsilon\nu x=0$ στο (0,1)

23)Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε : $\left(\frac{1}{2\sqrt{\xi}}-3\xi^2\right)\cdot\eta\mu\xi+\left(\sqrt{\xi}-\xi^3\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\xi=0$.

24)Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-3\alpha x^2=2(\alpha+8)x-4\alpha$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-2,2)

25)Αν 26α+3βln3=0, να δείξετε ότι η εξίσωση : $\alpha x^2+\frac{\beta}{x}+\eta\mu(\pi x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,3)

26)Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2+2\lambda x-\lambda-1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

27)Να δείξετε ότι η εξίσωση $2007x^{2006}-2006(\lambda+1)x^{2005}+\lambda=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

1) Αν στη σχέση υπάρχει μόνο $f'(x)$ με κάποιο όρο δίπλα της (ως συντελεστή), τότε διαιρώ όλα με τον ορό αυτό, ώστε να έχω μόνο $f'(x)$, τα πηγαίνω όλα στο 1ο μέλος και το θέτω συνάρτηση $g(x)$. Αν δεν εφαρμόζεται το Θ. Bolzano στη $g(x)$, τότε βρίσκω (με αντιπαραγωγιση) μια αρχική $G(x)$ της $g(x)$ τέτοια ώστε $G'(x)=g(x)$ και εφαρμόζω Θ. Rolle στην αρχική $G(x)$. Αν η εκφώνηση μας δίνει εξίσωση που περιέχει $f'(x)$ και δεν μας δίνει πληροφορία ότι η $f'(x)$ είναι συνεχής, τότε δεν μπορώ να εφαρμόσω Θ. Bolzano και θα πρέπει να εφαρμόσω Θ. Rolle.

2) Αν στη σχέση υπάρχει και $f'(x)$ και $f(x)$, τότε μεταφέρω όλους τους όρους στο 1ο μέλος και προσπαθώ να φτιάξω (με αντιπαραγωγιση) παράγωγο γινομένου ή πηλίκου ή παράγωγο σύνθετης συνάρτησης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

28)Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $f(2)-f(1)=\ln 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi)=2\xi^2-3\xi+1$.

Λύση :

Θέτουμε όπου ξ το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $xf'(x)=2x^2-3x+1\Leftrightarrow$

$\overset{\div x}{\Leftrightarrow} f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}\Leftrightarrow f'(x)-2x+3-\frac{1}{x}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Θέτω $g(x)=f'(x)-2x+3-\frac{1}{x}$ και θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2), όμως δεν μπορώ να εφαρμόσω Θ. Bolzano στη $g(x)$ γιατί δεν γνωρίζω αν η $f'(x)$ είναι συνεχής ώστε και η $g(x)$ συνεχής στο [1,2].

Έτσι θα βρω μια αρχική $G(x)$ της $g(x)$. Έχω $G(x)=f(x)-x^2+3x-\ln x$. Θ. Rolle για τη $G(x)$ στο [1,2].

- $G(x)$ συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών
- $G(x)$ παραγωγίσιμη στο (1,2) ως πράξεις παραγωγισιμων με $G'(x)=g(x)$
- $G(1)=f(1)-1+3=f(1)+2$, $\quad G(2)=f(2)-4+6-\ln 2=f(2)+2-\ln 2$

Πρέπει $G(1)=G(2)\Leftrightarrow f(1)+2=f(2)+2-\ln 2\Leftrightarrow f(2)-f(1)=\ln 2$ που ισχύει από εκφώνηση. Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $G'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

29)Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο [0,1] και παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f(0)=2f(1)$. Να δείξετε η εξίσωση $f'(x)=-\frac{2x}{x^2+1}\cdot f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

<u>Λύση :</u>

$f'(x)=-\frac{2x}{x^2+1}\cdot f(x)\Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)=-2xf(x)\Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)+2xf(x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)+(x^2+1)'f(x)=0\Leftrightarrow \left((x^2+1)f(x)\right)'=0$

Θέτω $g(x)=(x^2+1)f(x)$, θα δείξω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1), Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο [0,1].

- $g(x)$ συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (0,1) ως πράξεις παραγωγισιμων
- $g(0)=f(0)$, $\quad g(1)=2f(1)$

Πρέπει $g(0)=g(1)\Leftrightarrow f(0)=2f(1)$ που ισχύει από εκφώνηση.

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

30)Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο [2,3], παραγωγίσιμη στο (2,3) με $f(3)=2f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο Α(1,0).

<u>Λύση :</u>

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(\xi,f(\xi))$.

Τότε : $(\varepsilon): y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$. Όμως η (ε) διέρχεται από το $\mathrm{A}(1,0)$ αν οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της. Δηλαδή :

$(\varepsilon): y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\overset{\substack{x=1\\y=0}}{\Leftrightarrow}0-f(\xi)=f'(\xi)(1-\xi)\Leftrightarrow f'(\xi)(\xi-1)-f(\xi)=0$

Δηλ. αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τ.ω. $f'(\xi)(\xi-1)-f(\xi)=0$

Όμοια αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)(x-1)-f(x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)(x-1)-f(x)(x-1)'}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x-1}\right)'=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,3)$

Έστω $g(x)=\frac{f(x)}{x-1}$, $x\in[2,3]$. Θα δείξω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,3)$. Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για τη $g(x)=\frac{f(x)}{x-1}$ στο $[2,3]$.

- $g(x)$ συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ ως πράξεις παραγωγίσιμες συναρτήσεων
- $g(2)=f(2)$, $g(3)=\frac{f(3)}{2}$

Πρέπει $g(2)=g(3)\Leftrightarrow f(2)=\frac{f(3)}{2}\Leftrightarrow f(3)=2f(2)$ που ισχύει από εκφώνηση.

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,3)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

31)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,e]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι και παραγωγίσιμη στο (1,e). Αν $f(e)=0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $\xi\cdot f'(\xi)\cdot\ln\xi=-f(\xi)$

32) Αν η συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $f(2)-f(1)=3-\ln 2$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $x_0\cdot f'(x_0)=2x_0^2-1$.

33)Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ με $f(0)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε : $(1-2\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.

34)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $f(1)-f(0)=e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $f'(x)-2x=e^x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

35)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[2,4]\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f(4)-f(2)=\ln 2$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $xf'(x)=2x^2-6x+1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (2,4).

36)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο [0,2] και παραγωγίσιμη στο (0,2) για την οποία ισχύει ότι : $f(2)-f(0)=6$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=3\xi^2-\xi$.

37)Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2), με $f(2)=2$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=\frac{f(x)}{x}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

38)Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2), με $f(2)=2$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)\cdot f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

39)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $f(1)=e^2-e$ και $f(2)=\frac{e^2}{2}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε : $x_0^2\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\cdot x_0-e^{x_0}=0$.

40)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+xf'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,2).

41)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $f(6)=3f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(2,6)$ τέτοιο ώστε : $\xi f'(\xi)=f(\xi)$.

42)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $f(0)=2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi+f(\xi)\eta\mu\xi=0$.

43)Έστω μια συνάρτηση f , συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $2f(1)=f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $\mathrm{M}(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

44)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)<0<f(2)$. Να δείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(x)=xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ δεν είναι γνησίως μονότονη.
ii. Υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : ΤΕΧΝΑΣΜΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ ΜΕ $e^{G(x)}$

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f'(x)+g(x)\cdot f(x)=0$ (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε ένα διάστημα (α,β) τότε :

1ον βρίσκουμε μια αρχική (παράγουσα) της $g(x)$ τέτοια ώστε $G'(x)=g(x)$

2ον πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1) με $e^{G(x)}$ και ισοδύναμα έχουμε :

(1) $\Leftrightarrow e^{G(x)}\cdot f'(x)+g(x)\cdot e^{G(x)}\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow e^{G(x)}\cdot f'(x)+G'(x)\cdot e^{G(x)}\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{G(x)}\cdot f'(x)+\left(e^{G(x)}\right)'\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{G(x)}\cdot f(x)\right)'=0$.

3ον εφαρμόζουμε Θ.Rolle για την $h(x)=e^{G(x)}\cdot f(x)$ στο [α,β]

Ειδικά αν έχουμε : 1) $f'(x)+f(x)=0$ πολλαπλασιάζουμε με e^{x}

2) $f'(x)-f(x)=0$ πολλαπλασιάζουμε με e^{-x}

3) $f'(x)+\lambda f(x)=0$ πολλαπλασιάζουμε με $e^{\lambda x}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

45)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-3f(\xi)$.

Λύση :

Θέτουμε όπου ξ το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση :

$f'(x)=-3f(x) \Leftrightarrow f'(x)+3f(x)=0 \overset{\substack{g(x)=3 \\ \text{άρα} \\ G(x)=3x}}{\underset{\cdot e^{3x}}{\Longleftrightarrow}} e^{3x}\cdot f'(x)+3e^{3x}\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{3x}\cdot f'(x)+\left(e^{3x}\right)'\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{3x}\cdot f(x)\right)'=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Έστω $g(x)=e^{3x}\cdot f(x)$, άρα θα δείξω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2). Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο [1,2]

- $g(x)$ συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (1,2) ως πράξεις παραγωγισιμων
- $g(1)=e^{3}\cdot f(1)=0$, $g(2)=e^{6}\cdot f(2)=0$ άρα ισχύει $g(1)=g(2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

46)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

Λύση :

Θέτουμε όπου ξ το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση :

$$f'(x)=2xf(x)\Leftrightarrow f'(x)-2xf(x)=0 \overset{\substack{g(x)=-2x\\ \acute{\alpha}\rho\alpha\\ G(x)=-x^2}}{\underset{\cdot e^{-x^2}}{<====>}} e^{-x^2}\cdot f'(x)-2xe^{-x^2}\cdot f(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2}\cdot f'(x)+\left(e^{-x^2}\right)'\cdot f(x)=0\Leftrightarrow \left(e^{-x^2}\cdot f(x)\right)'=0$$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Έστω $g(x)=e^{-x^2}\cdot f(x)$, άρα θα δείξω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2). Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο [1,2]

- $g(x)$ συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (1,2) ως πράξεις παραγωγισιμων
- $g(1)=e^{-1}\cdot f(1)=0$, $g(2)=e^{-4}\cdot f(2)=0$ άρα ισχύει $g(1)=g(2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

47)Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε :

i. $f'(\xi)+f(\xi)=0$

ii. $f'(\xi)-f(\xi)=0$

iii. $f'(\xi)+2f(\xi)=0$

iv. $f'(\xi)=3f(\xi)$

v. $f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$

vi. $f'(\xi)=\eta\mu\xi\cdot f(\xi)$

48)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=f(3)\cdot e^6$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+3f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,3).

49)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημενες 1 και 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $2f'(\xi)=5f(\xi)$.

50)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(2)>0$ και $f(1)>0$, για τα οποία ισχύει $\ln f(1)=3+\ln f(2)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+2xf(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).

51)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\dfrac{f(2)}{f(1)}=\sqrt{e}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\xi^2 f'(\xi)=f(\xi)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : Η ΕΞΙΣΩΣΗ $f(x)=0$ ΕΧΕΙ ΤΟ ΠΟΛΥ κ ΡΙΖΕΣ

Α. Η f(x)=0 έχει μια το πολύ ρίζα ρ_1 στο (α,β)

1ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ : Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη , ή

2ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ : Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει και δεύτερη ρίζα ρ_2, και εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την f στο [ρ_1, ρ_2]$\Rightarrow$ άτοπο!

Β. Η f(x)=0 έχει δυο το πολύ ρίζες στο (α,β)

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει και τρίτη ρίζα. Δηλαδή έχει ρίζες τις ρ_1, ρ_2, ρ_3 με π.χ $\rho_1<\rho_2<\rho_3$, οπότε εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την f στα δυο διαστήματα που εμφανίζονται : [ρ_1, ρ_2],[ρ_2, ρ_3]$\Rightarrow$ άτοπο!

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

52)Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x)\neq 2x-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x^2-3x+\alpha$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Λύση :

Έχω την εξίσωση $f(x)=x^2-3x+\alpha \Leftrightarrow f(x)-x^2+3x-\alpha=0$. Έστω η συνάρτηση : $g(x)=f(x)-x^2+3x-\alpha$. Θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Επειδή δεν γνωρίζω τον τύπο της $f(x)$ δεν μπορώ να βρω τη μονοτονία της άρα ούτε και της $g(x)$. Άρα θα χρησιμοποιήσω τον 2ο τρόπο. Έστω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει 2 ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, εφαρμόζω Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο $[\rho_1,\rho_2]$

- $g(x)$ συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) ως πράξεις παραγωγισιμων με $g'(x)=f'(x)-2x+3$
- $g(\rho_1)=0$, $g(\rho_2)=0$ (ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της $g(x)=0$) άρα ισχύει $g(\rho_1)=g(\rho_2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-2x+3=0 \Leftrightarrow f'(x)=2x-3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (ρ_1,ρ_2). Άτοπο γιατί $f'(x)\neq 2x-3$ για κάθε $x\in\Re$. Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

53)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και αντιστρέψιμη.

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x^2-3x+1)-f(2x-5)=0$.

Λύση :

i. Θα υποθέσουμε ότι η f δεν είναι 1-1, άρα θα υπάρχουν x_1,x_2 με $x_1\neq x_2$ τ.ω. $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_1<x_2$, τότε εφαρμόζω Θ.Rolle για την f στο $[x_1,x_2]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) και
- $f(x_1)=f(x_2)$

Άρα υπάρχει $\xi \in \left(x_1, x_2\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, που είναι άτοπο καθώς $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι 1-1 και άρα είναι και αντιστρέψιμη.

ii. $f(x^2-3x+1)-f(2x-5)=0 \Leftrightarrow f(x^2-3x+1)=f(2x-5) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x^2-3x+1=2x-5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

54)Να δειχθεί ότι εξίσωση : $x^6+x^2=ax+\beta$ με $\alpha,\beta\in\Re$ έχει το πολύ δυο ρίζες στο $\Re$.

55)Να δειχθεί ότι εξίσωση : $e^x+x^2=ax+\beta$ με $\alpha,\beta\in\Re$ έχει το πολύ δυο ρίζες στο $\Re$.

56)Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x)\neq 2x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x^2-x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

57) Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x)\neq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)=x^2$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

58)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση : $f(3x-2)-f(2x+1)=0$.

59)Δίνεται μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της δεν είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) : 2x-y+1=0 . Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία (η) : y=2x έχουν ένα το πολύ κοινό σημείο.

60) Αν για τη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\Re$ ισχύει $f^2(x)-3f(x)+2=e^x+x$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ σε ένα σημείο.

61)Αν για τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ ισχύει $f^2(x)+4f(x)-2x=e^x-3$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ σε ένα σημείο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : Η ΕΞΙΣΩΣΗ $f(x)=0$ ΕΧΕΙ ΑΚΡΙΒΩΣ κ ΡΙΖΕΣ

Η f(x)=0 έχει μια ακριβώς ρίζα στο (α,β)

Βήμα 1ο : Η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ_1 στο (α,β) (με προφανή ή Θ. Bolzano ή σύνολο τιμών ή Θ. Rolle)

Βήμα 2ο : 1ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Μονοτονία για την f στο [α,β] ή
2ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Έστω ότι η f(x)=0 έχει και δεύτερη ρίζα ρ_2, με π.χ. $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow$ Θ. Rolle για την f στο [ρ_1, ρ_2]$\Rightarrow$ άτοπο!

Η f(x)=0 δυο ακριβώς ρίζες στο (α,β)

Βήμα 1ο : Εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη περίπτωση για την f στα [α,γ], [γ,β]$\Rightarrow$ η f έχει δυο τουλάχιστον ρίζες : $\rho_1 \in (\alpha,\gamma)$ και $\rho_2 \in (\gamma,\beta)$.

Βήμα 2ο : 1ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στα [α,γ] και [γ,β] $\Rightarrow$ υπάρχουν δυο ακριβώς ρίζες ή
2ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Έστω ότι η f(x)=0 έχει και τρίτη ρίζα ρ_3 με π.χ. $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Στη συνέχεια : εφαρμόζω το Θ. Rolle για την f στα [ρ_1, ρ_2],[ρ_2, ρ_3]$\Rightarrow$ άτοπο!

Η f(x)=0 έχει ν ακριβώς ρίζες (P πολυώνυμο του x)

Ειδικά αν η συνάρτηση είναι πολυώνυμο P, εκτός από τη μέθοδο της περίπτωσης 4), αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση P(x)=0 έχει ν ακριβώς ρίζες, τότε :

i. Με το Θ. Bolzano Δείχνουμε ότι η εξίσωση έχει ν τουλάχιστον ρίζες. (1)
ii. Επειδή P είναι πολυώνυμο ν βαθμού, έχει το πολύ ν ρίζες (2). οπότε από (1) και (2) $\Rightarrow$η εξίσωση έχει ν ακριβώς ρίζες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

62) Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο [1,2] με $\frac{1}{2} < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1,2]$ και $f'(x) \neq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in (1,2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{1}{2}x_0$. (Υπόδειξη : Για τουλάχιστον μια Θ.Bolzano στην $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ και για το πολύ μια Θ.Rolle για τη g με άτοπο)

Λύση :

Θέτουμε όπου x_0 το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2}x = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,2)$. Έστω $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$.

Βήμα 1ο Αρχικά θα δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$. Θ. Bolzano για τη $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ στο $[1,2]$

- $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών (η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ άρα και συνεχής στο $[1,2]$ άρα και η $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών)

- $g(1)=f(1)-\frac{1}{2}>0$ (αφού $\frac{1}{2}<f(x)<1$ για κάθε $x\in[1,2]$) άρα και $\frac{1}{2}<f(1)<1$)

  $g(2)=f(2)-1<0$ (αφού $\frac{1}{2}<f(x)<1$ για κάθε $x\in[1,2]$) άρα και $\frac{1}{2}<f(2)<1$)

  Δηλαδή $g(1)\cdot g(2)<0$ άρα από Θ. Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$

Βήμα 2ο Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(1,2)$. Επειδή δεν γνωρίζω τον τύπο της $f(x)$ δεν μπορώ να βρω τη μονοτονία της άρα ούτε και της $g(x)$. Άρα θα χρησιμοποιήσω τον 2ο τρόπο. Έστω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει 2 ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, εφαρμόζω Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο $[\rho_1,\rho_2]$

- $g(x)$ συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) ως πράξεις παραγωγισιμων με $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}$
- $g(\rho_1)=0$, $g(\rho_2)=0$ (ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της $g(x)=0$) άρα ισχύει $g(\rho_1)=g(\rho_2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$. Άτοπο γιατί $f'(x)\neq\frac{1}{2}$ για κάθε $x\in(1,2)$. Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Τελικά από βήμα 1ο και βήμα 2ο συμπεραίνω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,2)$.

63) Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f(1)-f(0)=2$ και $f''(x)<2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=4\xi^3+2\xi$.

Λύση :

Θέτουμε όπου ξ το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=4x^3+2x\Leftrightarrow$ $f'(x)-4x^3-2x=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$. Θέτω $g(x)=f'(x)-4x^3-2x$.

Βήμα 1ο Αρχικά θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$, όμως δεν μπορώ να εφαρμόσω Θ. Bolzano στη $g(x)$ γιατί δεν έχω κάποια πληροφορία για το πρόσημο της $f'(x)$.

Έτσι θα βρω μια αρχική $G(x)$ της $g(x)$. Έχω $G(x)=f(x)-x^4-x^2$. Θ. Rolle για τη $G(x)$ στο $[0,1]$.

- $G(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών (η f παραγωγίσιμη άρα και συνεχής άρα και η $G(x)=f(x)-x^4-x^2$ συνεχής ως πράξεις συνεχών)
- $G(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγισιμων με $G'(x)=g(x)=f'(x)-4x^3-2x$
- $G(0)=f(0)$, $G(1)=f(1)-1-1=f(1)-2$

Πρέπει $G(0)=G(1)\Leftrightarrow f(0)=f(1)-2\Leftrightarrow f(1)-f(0)=2$ που ισχύει από εκφώνηση. Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $G'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Βήμα 2ο Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0,1)$. Επειδή δεν γνωρίζω τον τύπο της $f(x)$ δεν μπορώ να βρω τη μονοτονία της άρα ούτε και της $g(x)$. Άρα θα χρησιμοποιήσω τον 2ο τρόπο. Έστω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει 2 ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, εφαρμόζω Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο $[\rho_1,\rho_2]$

- $g(x)$ συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πράξεις συνεχών

- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ως πράξεις παραγωγισιμων με $g'(x) = f''(x) - 12x^2 - 2$
- $g(\rho_1) = 0$, $g(\rho_2) = 0$ (ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της $g(x) = 0$) άρα ισχύει $g(\rho_1) = g(\rho_2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - 12x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 12x^2 + 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Άτοπο γιατί $f''(x) < 2$ για κάθε $x \in \Re$. Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Τελικά από βήμα 1^{o} και βήμα 2^{o} συμπεραίνω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

64)Να αποδείξετε με το θεώρημα Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα $\mathrm{A}(0,1), \mathrm{B}(1,2)$.

65)Να δειχθεί ότι έχουν ακριβώς μια ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα οι παρακάτω εξισώσεις:

i. $2x = \sigma\upsilon\nu x$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ii. $x^3 + 3x = 1 - 3\eta\mu x$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

66)Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2 = 3\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

67) Δίνεται η συνάρτηση f με $f'(x) \neq e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [0,1]$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e^{x_0} - 1$. (Υπόδειξη : Για τουλ. μια Θ.Bolzano στην $g(x) = f(x) - e^x + 1$ και για το πολύ μια Θ.Rolle για τη g με άτοπο)

68) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) < 1$ και $1 < f(x) < 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e^{x_0} + x_0$.

69)Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,2] \to \Re$ παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 1$ και $1 < f(x) < 2$ για κάθε $x \in [1,2]$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ακριβώς ένα σημείο.

70)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 13x^3 - 18x^2 + 2x + 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο (-1,1).
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 39x^2 - 36x + 2 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζες στο (-1,1)

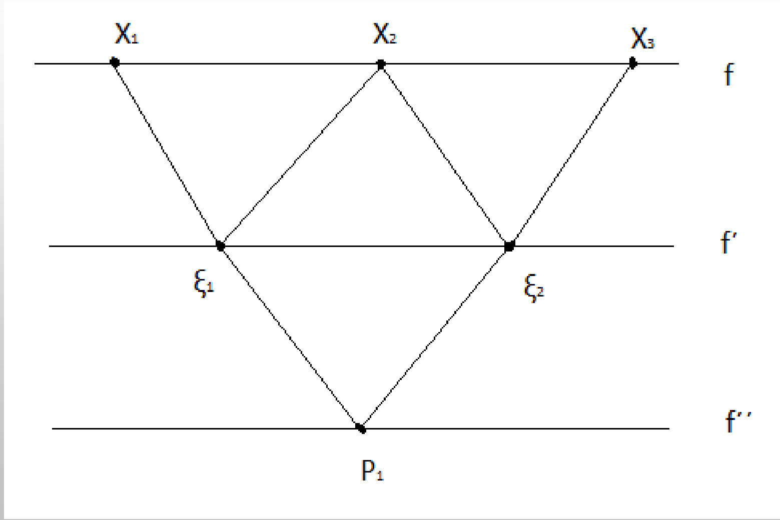
71)Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0) - f(1) = -e$ και $f''(x) \neq e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = e^{\xi} + 1$. (Υπόδειξη : Ύπαρξη ρίζας με Θ. Rolle για την $F(x) = f(x) - e^x - x$ και για το πολύ μια ρίζα Θ.Rolle για τη $g(x) = f'(x) - e^x - 1$ με άτοπο)

72)Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0) - f(1) = -e - 2013$ και $f''(x) \neq e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = e^{\xi} + 2014$. (Υπόδειξη : Όμοια με παραπάνω)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : (ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ Θ.ROLLE)

Ισχύει η εξής πρόταση : Ανάμεσα σε δυο ρίζες της f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f΄

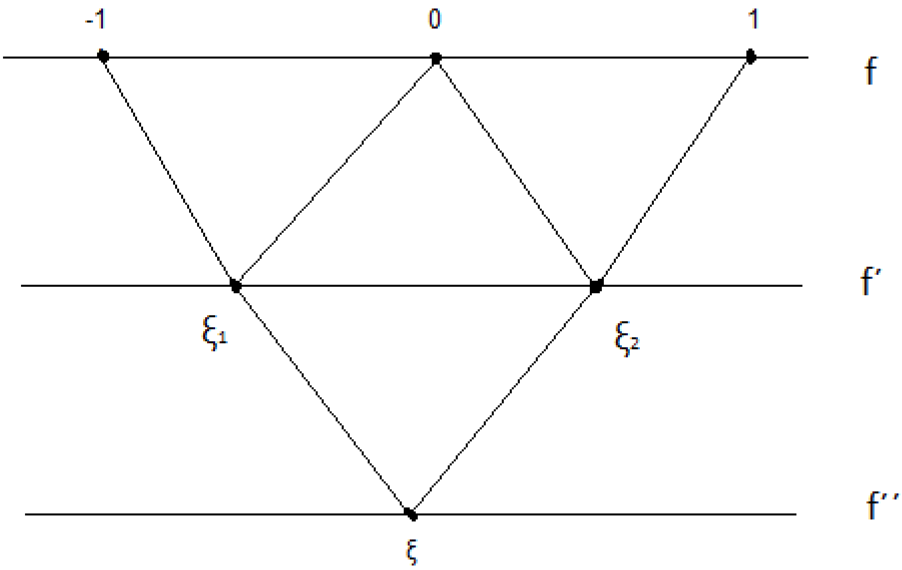
Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f''(\xi) = 0$, πρέπει να εφαρμόσουμε το Θ.Rolle για την $f'(x)$ σε κάποιο διάστημα $[x_1, x_2]$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε δυο αριθμούς $x_1 \neq x_2$ με $f'(x_1) = f'(x_2)$. Οι τιμές αυτές μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή του Θ.R. σε δυο διαστήματα ξένα μεταξύ τους.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

73)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την όποια ισχύει ότι $f(-1) = f(0) = f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Λύση :



1) Θ. Rolle για την $f(x)$ στο $[-1,0]$

- $f(x)$ συνεχής στο $[-1,0]$
- $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$

- $f(-1)=f(0)$

Άρα υπάρχει $\xi_1 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=0$

2) Θ. Rolle για την $f(x)$ στο $[0,1]$

- $f(x)$ συνεχής στο $[0,1]$
- $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$
- $f(0)=f(1)$

Άρα υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=0$

3) Θ. Rolle για την $f'(x)$ στο $[\xi_1,\xi_2] \subseteq [-1,1]$

- $f'(x)$ συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$
- $f'(x)$ παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2)
- $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

Άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

74)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγισιμη για την όποια ισχύει ότι $f(0)=f(1)=f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

75)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημενες 1,2,3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

76)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την όποια ισχύει ότι $f(0)=f(2)=2$ και $f(1)=3$ Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=4-6\xi$.

77)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την όποια ισχύει ότι $f(0)=-1$, $f(1)=e$ και $f(2)=e^2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^x+x^2-3x$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον σημεία της C_g με τετμημενες στο διάστημα (0,2) στα όποια η C_g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)+2=e^{\xi}$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

78) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f'(2)=4$, $f(1)=3$ και $f(x)\le x^2+2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=3-2x_0$.

79) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Αν η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από τα σημεία $A(6,1)$ και $B(2,3)$, τότε να λύσετε την εξίσωση : $f^{-1}\left(4+f(x^2-1)\right)=1$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)}=-\xi$.

80) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f(2)f(4)\neq 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(2, f(2)\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία : $(\zeta): f'(4)x-\dfrac{f(2)}{f(4)}y+2017=0$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(2)f'(2)=f(4)f'(4)$,

ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)f''(\xi)+\left(f'(\xi)\right)^2=0$,

iii. η εξίσωση $xf(x)f''(x)+1-x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,4)$.

81) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f'(-2)=16$, $f'(-1)=9$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\eta\mu 3x}{x^2-x}=2$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-2,-1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=e^{-2\xi}$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M\left(0, f(0)\right)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)+2f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-2,0)$.

82) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $\Re$, για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

ii. Αν η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από τα σημεία $A(9,2)$ και $B(4,3)$, τότε να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(5+f(x^2-1)\right)=2$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $2g(\xi)+\xi=0$.

iv. Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής και η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $M(x_0,0)$, τότε να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της M σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

2.5Β ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Β. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (Θ.Μ.Τ.)

40.ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (2003, 2008 Β΄, 2013, 2016)

Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση :

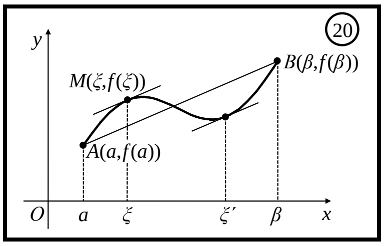
Το θεώρημα της μέσης τιμής διατυπώνεται ως εξής :

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$ **και**
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιο, ώστε:**

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$



Γεωμετρική Ερμηνεία :

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ [α,β]

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ με $x\in[0,4]$.

i. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0,4]$

ii. Να βρείτε το $\xi\in(0,4)$

Λύση :

i. Θ.Μ.Τ για την $f(x)=\sqrt{x}$ στο $[0,4]$ έχω :

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,4]$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}=\dfrac{2-0}{4}=\dfrac{1}{2}$

ii. Έχω : $f'(\xi)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{\xi}=2\Leftrightarrow\sqrt{\xi}=1\Leftrightarrow\xi=1.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x$ με $x\in[0,4]$.
   i. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [0,4]
   ii. Να βρείτε το $\xi\in(0,4)$

3) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi\in(\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.
   i. $f(x)=x^3+x$, [0,1] ii. $f(x)=x\ln x$, [1,e] iii. $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+5, x<1\\ 2x^2-5x+6, x\geq 1\end{cases}$, [0,2]

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$. Να δείξετε ότι :
   i. ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ, για την f στο διάστημα $[e,e^2]$
   ii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(e,e^2)$ τ.ω. $f'(\xi)<0$
   iii. $f(\xi)>\dfrac{1}{\xi}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2</u> : ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f'(x)=\kappa$ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ $f(x)$

Γενικά για να δείξω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\kappa$ τότε :
1ος Θ.Μ.Τ για την f στο [α,β]
2ος Θ. Rolle για τη $g(x)=f(x)-kx$
3ος Θ. Bolzano για την $h(x)=f'(x)-k$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $f(0)=2$, $f(1)=4$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(x_1,f(x_1))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία y=2x+2000. (Πανελλήνιες 2000)

<u>Λύση :</u>

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_1,f(x_1))$. Η $(\varepsilon)//\ y=2x+2000 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f'(x_1)=2$. Δηλαδή αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=2$
Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[0,1]$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ (η $f(x)$ είναι παραγωγισιμη άρα και συνεχής)
- Η $f(x)$ είναι παραγωγισιμη στο $(0,1)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{4-2}{1}=2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-1, f(-1))$, $\mathrm{B}(2, f(2))$.
   i. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (-1,2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f να είναι παράλληλη στην ευθεία AB.
   ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ.

7) Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ να δειχτεί ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» στο διάστημα [α,β].

8) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(-1) = 3$ και $f(2) = 15$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4$.

9) Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-1,2)$ και $\mathrm{B}(1,3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): 2x + y - 3 = 0$.

10) Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(2,6)$ και $\mathrm{B}(0,3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): 2x + 3y - 3 = 0$.

11) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = f(1) + 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (1,4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα x΄x.

12) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha) = 2\beta + 6\alpha$ και $f(\beta) = 5\beta + 3\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 3$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ $f'(\xi_1)$, $f'(\xi_2)$, $f'(\xi_3)$

Όταν μας ζητούν να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_\nu \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + ... + f'(\xi_\nu) = \lambda$, τότε χωρίζουμε το διάστημα [α,β] σε ν υποδιαστήματα και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ σε κάθε ένα από αυτά.

Υποπερίπτωση : Αν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $\kappa_1 f'(\xi_1) + \kappa_2 f'(\xi_2) + \kappa_3 f'(\xi_3) = \lambda$ τότε βρίσκουμε το άθροισμα $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = \kappa$ και παίρνουμε αντίστοιχα σημεία γ,δ τέτοια ώστε :

$\gamma - \alpha = \frac{\kappa_1}{\kappa}(\beta - \alpha)$, $\delta - \gamma = \frac{\kappa_2}{\kappa}(\beta - \alpha)$ και $\beta - \delta = \frac{\kappa_3}{\kappa}(\beta - \alpha)$ και στη συνέχεια εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα [α.γ], [γ,δ], [δ,β].

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13)Έστω μια συνάρτηση $f:[1,3] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το [0,2] και είναι παραγωγίσιμη στο (1,3), να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -2$.

Λύση :

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = [1,3]$ άρα θα έχει σύνολο τιμών : $f(\Delta) = [f(3), f(1)]$ όμως από εκφώνηση $f(\Delta) = [0,2]$ άρα $f(3) = 0$ και $f(1) = 2$. Για να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -2$ θα εφαρμόσουμε 2 Θ.Μ.Τ. για την f.

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,2]$
- f συνεχής στο $[1,2]$
- f παραγωγίσιμη στο $(1,2)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - 2$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,3]$
- f συνεχής στο $[2,3]$
- f παραγωγίσιμη στο $(2,3)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = -f(2)$

Άρα τελικά $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(2) - 2 - f(2) = -2$.

14)Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,5]$, παραγωγίσιμη στο $(0,5)$ και ισχύει $f(5) = f(0) + 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,5)$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 1$

Λύση :

Είναι $\kappa = 2 + 3 \Leftrightarrow \kappa = 5$. Χωρίζουμε το διάστημα $[0,5]$ σε $[0,\gamma],[\gamma,5]$ ώστε

$\gamma - 0 = \frac{2}{5}(5 - 0) \Leftrightarrow \gamma = 2$

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,2]$
- f συνεχής στο $[0,2]$

- f παραγωγίσιμη στο $(0,2)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{f(2)-f(0)}{2}$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,5]$
- f συνεχής στο $[2,5]$
- f παραγωγίσιμη στο $(2,5)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (2,5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{f(5)-f(2)}{3}$

Τελικά : $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 2\frac{f(2)-f(0)}{2} + 3\frac{f(5)-f(2)}{3} = f(2)-f(0)+f(5)-f(2) =$

$= f(5)-f(0) \overset{f(5)=f(0)+1}{=} f(0)+1-f(0) = 1$

15)Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $3f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 0$.

<u>Λύση :</u>

Αφού για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha) = f(\beta)$.

Είναι $\kappa = 3+2 \Leftrightarrow \kappa = 5$. Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε $[\alpha,\gamma],[\gamma,\beta]$ ώστε

$\gamma - \alpha = \frac{3}{5}(\beta-\alpha)$, $\beta - \gamma = \frac{2}{5}(\beta-\alpha)$

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\gamma]$
- f συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$
- f παραγωγίσιμη στο (α,γ)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} = \frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\frac{3}{5}(\beta-\alpha)} =$

$= \frac{5}{3}\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\gamma,\beta]$
- f συνεχής στο $[\gamma,\beta]$
- f παραγωγίσιμη στο (γ,β)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (\gamma,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma} = \frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\frac{2}{5}(\beta-\alpha)} =$

$= \frac{5}{2}\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\alpha}$

Τελικά : $3f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 3\frac{5}{3}\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} + 2\frac{5}{2}\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\alpha} =$

$= \frac{5f(\gamma)-5f(\alpha)}{\beta-\alpha} + \frac{5f(\beta)-5f(\gamma)}{\beta-\alpha} = \frac{5f(\gamma)-5f(\alpha)+5f(\beta)-5f(\gamma)}{\beta-\alpha} = \frac{5\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)}{\beta-\alpha} = 0$

καθώς $f(\alpha) = f(\beta)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

16)Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Rolle στο [1,3]. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1\ ,\xi_2 \in (1{,}3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

17)Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f(3x)=3f(x)$ για κάθε $x\in\Re$. Αν $f(1)=3$ δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2,x_3\in(0{,}3)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)+f'(x_3)=9$.

18)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(1)=2$, $f(2)=4$ και $f(4)=3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον $\xi_1,\ \xi_2\in(1{,}4)$ διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $\mathrm{A}(\xi_1, f(\xi_1))$ και $\mathrm{B}(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι μεταξύ τους κάθετες.

19)Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο [0,3] να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0{,}3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)=0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : (Θ.Μ.Τ. & Θ.Bolzano), (Θ.Μ.Τ. & Θ.Ε.Τ.),

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει μια σχέση της μορφής $g(f(\xi_1), f(\xi_2))=\kappa$ ή $g(f(\xi_1), f(\xi_2))<\acute{\eta}>0$, τότε χωρίζουμε το διάστημα (α,β) σε δυο υποδιαστήματα (α,x_0) και (x_0,β), όπου το x_0 μπορεί να προκύψει από το Θ.Bolzano ή από το Θ.Ε.Τ. και μετά εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,x_0]$, $[x_0,\beta]$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20)Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$, η οποία είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

ii. Υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$.

(3ο Επαναληπτικές Πανελλήνιες 2001)

Λύση :

i. Θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

Έστω $g(x)=f(x)-2x$ θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β). Εφαρμόζω Θ. Bolzano για τη $g(x)$ στο [α,β]

- g συνεχής στο [α,β] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $g(\alpha)=f(\alpha)-2\alpha=2\beta-2\alpha=2(\beta-\alpha)>0$
- $g(\beta)=f(\beta)-2\beta=2\alpha-2\beta=2(\alpha-\beta)<0$ δηλ. $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$

Οπότε από Θ. Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β), δηλ. υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-2x_0=0 \Leftrightarrow f(x_0)=2x_0$.

ii. Για να δείξω ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) f'(\xi_2) = 4$, θα πρέπει να διασπάσω το διάστημα (α,β) ώστε να εφαρμόσω δυο Θ.Μ.Τ.

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, x_0]$
- f συνεχής στο $[\alpha, x_0]$
- f παραγωγίσιμη στο (α, x_0)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, x_0)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{2x_0 - 2\beta}{x_0 - \alpha} = \frac{2(x_0 - \beta)}{x_0 - \alpha}$$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x_0, \beta]$
- f συνεχής στο $[x_0, \beta]$
- f παραγωγίσιμη στο (x_0, β)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{2\alpha - 2x_0}{\beta - x_0} = \frac{2(\alpha - x_0)}{\beta - x_0}$$

Τελικά : $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \dfrac{2(x_0 - \beta)}{x_0 - \alpha} \cdot \dfrac{2(\alpha - x_0)}{\beta - x_0} = \dfrac{2(x_0 - \beta)}{x_0 - \alpha} \cdot \dfrac{-2(x_0 - \alpha)}{-(x_0 - \beta)} = 4$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

21)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, 2\alpha] \to \Re$, με α>0 για την οποία ισχύει $f(\alpha) = \alpha$ και $f(2\alpha) = 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, 2\alpha)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 3\alpha - x_0$

ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, 2\alpha)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $f'(\xi_1) f'(\xi_2) = 1$.

22)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$, για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 8$. Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 6$

ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $\dfrac{2}{f'(\xi_1)} + \dfrac{1}{f'(\xi_2)} = 1$.

23)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$, για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 6$. Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 8 - 2x_0$

ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $f'(\xi_1) f'(\xi_2) = 4$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : (ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ Θ.Μ.Τ. & Θ.Rolle) ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ $f''(\xi)$ - ΠΡΟΣΗΜΟ $f'(\xi)$, $f''(\xi)$

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε : $f''(\xi)=0$, ή $f''(\xi)<0$ ή $f''(\xi)>0$ τότε εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$ όπου $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και βρίσκουμε τις τιμές $f'(\xi_1)$, $f'(\xi_2)$ όπου $\xi_1 \in (\alpha,x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0,\beta)$.

- Αν $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$, τότε εφαρμόζουμε Θ.Rolle για την f' στο $[\xi_1,\xi_2]$ και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.
- Αν $f'(\xi_1) \neq f'(\xi_2)$, τότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στην f' στο $[\xi_1,\xi_2]$ και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε
    - $f''(\xi)<0$, αν $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$
    - $f''(\xi)>0$, αν $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$

Γενικά για την f εφαρμόζουμε ένα ή δυο Θ.Rolle ή Θ.Μ.Τ. εκμεταλλευόμενοι τα δεδομένα, ενώ για την f' εφαρμόζουμε Θ.Rolle ή Θ.Μ.Τ. εκμεταλλευόμενοι τα ζητούμενα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

24) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α)=f(β)=0 και υπάρχουν αριθμοί γ∈(α,β), δ∈(α,β), έτσι ώστε f(γ)<0, f(δ)>0 και γ<δ, να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (α,β).
ii. Υπάρχουν σημεία ξ_1, $\xi_2 \in$ (α,β) τέτοια ώστε $f''(\xi_1)>0$ και $f''(\xi_2)<0$.
iii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)=0$. *(4ο Πανελλήνιες 2003)*

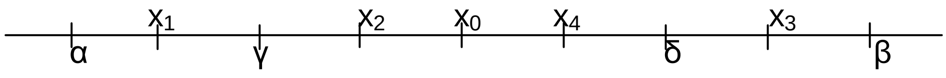
Λύση :

i. Η f είναι συνεχής στο $[\gamma,\delta] \subseteq [\alpha,\beta]$

f(γ)·f(δ)<0

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\gamma,\delta) \subseteq (\alpha,\beta)$ της f δηλ. $f(x_0)=0$

ii.



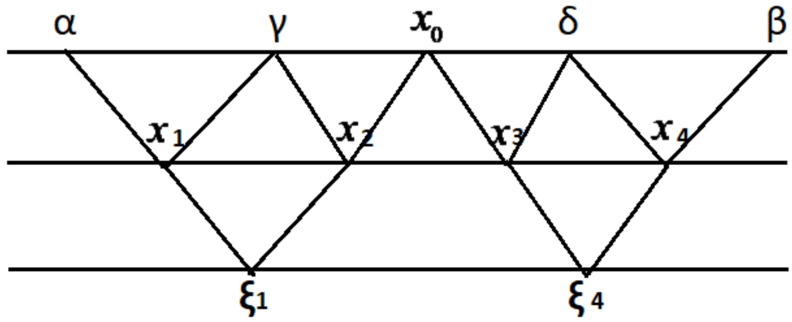
Επειδή f(γ)·f(δ)<0 υποθέτω: f(γ)<0 και f(δ)>0

(Σε αντίθετη περίπτωση η απόδειξη είναι όμοια)

$$\left.\begin{array}{l} f \;\; συνεχής \;\; στο [\alpha,\gamma] \\ f \;\; παραγ. \;\; στο \; (\alpha,\gamma) \end{array}\right| \overset{Θ.Μ.Τ}{\Rightarrow} \begin{array}{l} Υπάρχει \; 1 \, τουλάχιστον \; x_1 \in (\alpha,\gamma) \\ f'(x_1)=\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\dfrac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}<0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \;\; συνεχής \;\; στο [\gamma,x_0] \\ f \;\; παραγ. \;\; στο \; (\gamma,x_0) \end{array}\right| \overset{Θ.Μ.Τ}{\Rightarrow} \begin{array}{l} Υπάρχει \; 1 \, τουλάχιστον \; x_2 \in (\gamma,x_0) \\ f'(x_2)=\dfrac{f(x_0)-f(\gamma)}{x_0-\gamma}=\dfrac{-f(\gamma)}{x_0-\gamma}>0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \ \text{συνεχής στο} [x_1, x_2] \\ f \ \text{παραγ. στο} \ (x_1, x_2) \end{array}\right| \overset{\Theta.\text{M.T}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} \Upsilon\text{πάρχει 1 τουλάχιστον} \ \xi_1 \in (x_1, x_2) \\ \text{και άρα} \ \xi_1 \in (\alpha, \beta) \\ f''(\xi_1) = \dfrac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \end{array}$$



Όμοια με ΘΜΤ στα [δ,β], [x_0,δ] εξασφαλίζω την ύπαρξη σημείων :
$x_3 \in$(δ,β): f΄(x_3)<0
$x_4 \in$(x_0,δ): f΄(x_4)>0 οπότε με ΘΜΤ στο [x_4,x_3] υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_4, x_3)$ και άρα $\xi_2 \in$(α,β):

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(x_3) - f'(x_4)}{x_3 - x_4} < 0$$

iii. Από το ii. διαπιστώνω ότι:
f΄΄ συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και
f΄΄(ξ_1)·f΄΄(ξ_2)<0
Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τ.ω. $f''(\xi) = 0$.

25)Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$. Αν τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$, $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι συνευθειακά, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \gamma)$ ώστε να είναι $f''(\xi) = 0$.

<u>Λύση :</u>
Τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακα άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ΑΒ) είναι ισος με το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ΒΓ). Δηλ.

$$\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}, \ (1)$$

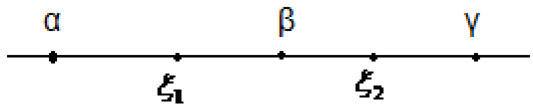
1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$
- f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- f παραγωγίσιμη στο (α, β)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\beta, \gamma]$
- f συνεχής στο $[\beta, \gamma]$
- f παραγωγίσιμη στο (β, γ)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$

Δηλ. λόγο της (1) ισχύει $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta} \Leftrightarrow f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$



3) Θ.Rolle. για την f' στο $[\xi_1,\xi_2]\subseteq[\alpha,\gamma]$
- f' συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]\subseteq[\alpha,\gamma]$
- f' παραγωγίσιμη στο $(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\gamma)$

Άρα από Θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

26)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(1)=\alpha+2\beta$, $f(2)=2\alpha+3\beta$ και $f(3)=3\alpha+4\beta$, με $\alpha,\beta\in\Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$, ώστε $f''(\xi)=0$. *(Υποδ. Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f''(\xi)=0$, πρέπει να εφαρμόσουμε το Θ.Rolle για την $f'(x)$ σε κάποιο διάστημα $[x_1,x_2]$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε δυο αριθμούς $x_1\neq x_2$ με $f'(x_1)=f'(x_2)$. Οι τιμές αυτές μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ σε δυο διαστήματα ξένα μεταξύ τους.)*

27)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1,5)$, $\mathrm{B}(2,-4)$, $\Gamma(3,2)$. Να αποδείξετε ότι :

i. υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,3)$, ώστε : $f(x_1)=f(x_2)=0$.

ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$, ώστε $f''(\xi)>0$.

28)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(1)=f(3)=0$ και $f(2)>0$. Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχουν ξ_1, $\xi_2\in(1,3)$ με $\xi_1<\xi_2$, ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

ii. Υπάρχει $\xi\in(1,3)$ ώστε $f''(\xi)<0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Αν έχουμε ως δεδομένο μια ανισοτική σχέση που περιέχει $f'(x)$ και μας ζητείται να αποδείξουμε μια ανισοτική σχέση για την $f(x)$, τότε η απόδειξη ενδεχομένως μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. (υπάρχουν και άλλοι τρόποι όπως θα μάθουμε)

- Μετασχηματίζω την ανισότητα έτσι ώστε να δημιουργηθεί στο κέντρο η διαφορά $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στο [α,β] οπότε έχω : $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1). Αφού $\xi\in(\alpha,\beta)\Leftrightarrow\alpha<\xi<\beta$, μορφοποιώ την παράσταση $f'(\xi)$ και έχω ανισότητα της μορφής $\mathrm{A}<f'(\xi)<\mathrm{B}$ η οποία λόγο της (1) αποδεικνύει την ζητούμενη ανισότητα.

- Μπορούμε να αποδείξουμε μια διπλή ανισότητα δυο μεταβλητών α,β χρησιμοποιώντας το Θ.Μ.Τ. Πρώτα βρίσκουμε συνάρτηση f, ώστε η ανισότητα να πάρει τη μορφή : $\kappa<\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<\lambda$. Μετά εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στο [α,β] έτσι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Τέλος ξεκινάμε από ανισότητα $\alpha<\xi<\beta$ και καταλήγουμε σε ανισότητα $\kappa<f'(\xi)<\lambda$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

29) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,4] με f(0)=1 και $2\le f'(x)\le 5$ για κάθε $x\in(0,4)$ να δειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $9\le f(4)\le 21$.

Λύση :

Θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[0,4]$

- f συνεχής στο $[0,4]$
- f παραγωγίσιμη στο $(0,4)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{f(4)-1}{4}$

Όμως επειδή από εκφώνηση ισχύει $2\le f'(x)\le 5$ για κάθε $x\in(0,4)$ άρα θα είναι :

$2\le f'(\xi)\le 5\Leftrightarrow 2\le\frac{f(4)-1}{4}\le 5\Leftrightarrow 8\le f(4)-1\le 20\Leftrightarrow 9\le f(4)\le 21$.

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$. Να αποδείξετε ότι $f(x)\le x-1$ για κάθε $x>0$. Πότε ισχύει η ισότητα ;

Βασική ανισότητα $\ln x\le x-1$

Λύση :

Θα δείξουμε ότι $f(x)\le x-1\Leftrightarrow\ln x\le x-1$ (1) για κάθε $x>0$.

- ✓ Αν $x=1$, τότε προφανώς η (1) ισχύει, ως ισότητα.
- ✓ Αν $0<x\neq 1$, θα δείξουμε ότι $\ln x<x-1\Leftrightarrow f(x)<x-1$ (2)
  - Αν $x>1$, τότε η (2) $\Leftrightarrow f(x)<x-1\overset{x>1}{\Leftrightarrow}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}<1$, (3)

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,x]$

- f συνεχής στο $[1,x]$
- f παραγωγίσιμη στο $(1,x)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Έτσι η $(3) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} < 1 \Leftrightarrow \xi > 1$, που ισχύει.

➢ Αν $0 < x < 1$, τότε η $(2) \Leftrightarrow f(x) < x-1 \overset{x<1}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} > 1$, (4)

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,1]$

- f συνεχής στο $[x,1]$
- f παραγωγίσιμη στο $(x,1)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Έτσι η $(4) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} > 1 \Leftrightarrow \xi < 1$, που ισχύει.

Τελικά $\ln x \le x-1$, για κάθε $x > 0$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 1$.

(Η ανισότητα $\boxed{\ln x \le x-1}$, για κάθε $x > 0$ θεωρείται <u>«βασική»</u> και χρησιμοποιείται σε ασκήσεις <u>χωρίς απόδειξη</u>.)

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

31)Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [3,5] και ισχύουν f(3)=4 και $2 \le f'(x) \le 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $8 \le f(5) \le 10$.

32) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1,5] με f(1)=3 και $0 \le f'(x) \le 5$ για κάθε $x \in (1,5)$ να δειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $3 \le f(5) \le 23$.

33)i.Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right| \le \dfrac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Αν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(\beta)-f(\alpha)| \le \dfrac{1}{2}|\beta-\alpha|$.

iii. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(\sqrt{x^2+1}\right)-f(x)\right)$

34) Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες :

i. $e^x \ge x+1$, $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει το ίσον;

ii. $e^x > x$, $x \in \Re$.

iii. $\ln x < x$, $x > 0$.

iv. $\ln x \ge 1-\dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

v. $e^{x-1} \ge x$, $x \in \mathbb{R}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : Θ.Μ.Τ. ΚΑΙ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΤΗΣ $f'(x)$ ΓΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x & ,x>0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει : $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$. *(3ο Πανελλήνιες 2008)*

Λύση :

Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)=x\ln x$. Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[x,x+1]$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ ως πράξεις συνεχών
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$ ως πράξεις παραγωγισιμων με $f'(x)=\ln x+1$.

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$. Όμως $\xi\in(x,x+1)$ άρα $\xi<x+1$ (1). Θα πρέπει να πάρω f' και στα δυο μέλη της (1), πρέπει όμως να γνωρίζω τη μονοτονία της f'. Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow \ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow \ln x_1+1<\ln x_2+1 \Leftrightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι η σχέση (1) θα γίνει : $(1):\xi<x+1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

36)Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Να δείξετε ότι $f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)$ για κάθε $x\in\Re$.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$ είναι : $f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1) \Leftrightarrow$

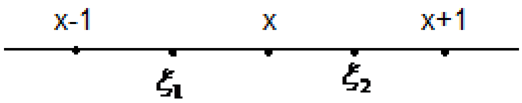
$$\Leftrightarrow \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}<f'(x)<\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}$$

Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[x-1,x]$ και στο $[x,x+1]$

$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f\ \textit{συνεχής στο}\ [x-1,x] \\ \bullet\ f\ \textit{παρ/μη στο}\ (x-1,x)\end{array}\right\}$ άρα υπάρχει $\xi_1\in(x-1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}$

Επίσης :

$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f\ \textit{συνεχής στο}\ [x,x+1] \\ \bullet\ f\ \textit{παρ/μη στο}\ (x,x+1)\end{array}\right\}$ άρα υπάρχει $\xi_2\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$



Έτσι ισχύει ότι :

$$\xi_1<x<\xi_2 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)>f'(x)>f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}>f'(x)>\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)-f(x-1)>f'(x)>f(x+1)-f(x) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)$$

Δηλαδή η σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε ισχύει για κάθε $x\in\Re$.

37)Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}, x>0$. *(3ο Επαναληπτικές Πανελλήνιες 2006)*

Λύση :

Για κάθε $x>0$ έχουμε : $\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x}<\frac{1}{x}$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$, $x>0$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την $f(x)=\ln x$ στο $[x,x+1]$

$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ συνεχής στο } [x,x+1] \\ \bullet\ f \text{ παρ/μη στο } (x,x+1)\end{array}\right\}$ άρα υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$

και $f'(x)=\frac{1}{x}$.

Για κάθε $x_1,x_2>0$ είναι $x_1<x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2} \Rightarrow f'(x_1)>f'(x_2) \Rightarrow f'\downarrow(0,+\infty)$

Έτσι ισχύει $\xi\in(x,x+1) \Leftrightarrow x<\xi \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{1}{x}>\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}>\frac{\ln(x+1)-\ln x}{1} \Leftrightarrow \ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$.

38)Αν $\alpha<\beta$ με $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, να δείξετε ότι $(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta<\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha<(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$.

Λύση :

Έχουμε να δείξουμε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $\alpha<\beta$ ισχύει :

$(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta<\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha<(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta<\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}<\sigma\upsilon\nu\alpha$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]\subseteq\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

- f συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subseteq\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
- f παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)\subseteq\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$

Άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)\subseteq\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}$

Δηλαδή έχουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει η σχέση (1) που γίνεται $\sigma\upsilon\nu\beta<\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}<\sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta<f'(\xi)<\sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta<\sigma\upsilon\nu\xi<\sigma\upsilon\nu\alpha$ (2).

Η $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Έτσι :

$\xi\in(\alpha,\beta)\subseteq\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha<\xi<\beta \overset{f'(x)=\sigma\upsilon\nu x\downarrow(\alpha,\beta)}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu\alpha>\sigma\upsilon\nu\xi>\sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta<\sigma\upsilon\nu\xi<\sigma\upsilon\nu\alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

39) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [1,7] και παραγωγίσιμη στο (1,7). Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (1,7) να δείξετε ότι $f(1)+f(7)>f(3)+f(5)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

40)Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x+1)+f(x+2)>f(x)+f(x+3)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

41)Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$. Να δείξετε ότι $f'(x)>\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ για κάθε $x>\alpha$.

42) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$. Να δείξετε ότι $f'(x)>\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ για κάθε $x<\alpha$.

43) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Αν ισχύει $f(0)=0$ να δείξετε ότι $f'(x)<\dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε $x>0$.

Θ.Μ.Τ. ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ – ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

44)(Άσκηση 6 σελ. 250 σχολικό βιβλίο Β΄ ομάδας)
Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [-1,1] και ισχύει $f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Αν $f(-1)=-1$ και $f(1)=1$, να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

<u>Λύση :</u>

Θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f\ \text{συνεχής στο}\,[-1,0]\\ \bullet\ f\ \text{παρ/μη στο}\,(-1,0)\end{array}\right\}$$

άρα υπάρχει $\xi_1\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=f(0)+1$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f\ \text{συνεχής στο}\,[0,1]\\ \bullet\ f\ \text{παρ/μη στο}\,(0,1)\end{array}\right\}$$

άρα υπάρχει $\xi_2\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1-f(0)$

Όμως : $f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in(-1,1)$, αρα :

$$\left.\begin{array}{l}f'(\xi_1)\le 1\Leftrightarrow f(0)+1\le 1\Leftrightarrow f(0)\le 0\\ f'(\xi_2)\le 1\Leftrightarrow 1-f(0)\le 1\Leftrightarrow f(0)\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

45)Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f΄(x)≠0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".

ii. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1), να λύσετε την εξίσωση : $f^{-1}\left(-2004 + f(x^2 - 8)\right) = -2$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε) : $y = -\dfrac{1}{668}x + 2005$.

(3ο Επαναληπτικές Πανελλήνιες 2005)

46)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $2f(x) - 2x \le f(4) + f(-4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(4) - f(-4) = 8$

ii. υπάρχει σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (-4,4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = x + 2012$

iii. υπάρχει $x_0 \in (-4,4)$ ώστε $f(x_0) = f(-4) + 4$

iv. υπάρχουν x_1, $x_2 \in (-4,4)$, ώστε $\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} = 2$.

47)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) = e^{-x^2} - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τα όρια : α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x+2) - f(x)\right)$

48) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα x΄x στο $x_0 = 1$. Αν επιπλέον δίνεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι :

i. $f\left(x^3\right) > (x+1) f\left(x^2\right) - xf(x)$ για κάθε $x > 1$.

ii. Η εξίσωση : $\dfrac{f'(\alpha)}{x-3} + \dfrac{\alpha f(\alpha) + f(\alpha^3) - (\alpha+1) f(\alpha^2)}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (2,3) για κάθε $\alpha > 1$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.5

ΘΕΜΑ 2 #36827

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = lnx,\ x > 0$ και $g(x) = e^{-x},\ x \in R$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση g έχει αντίστροφη και να αποδείξετε ότι $g^{-1} = -f$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω $h(x) = (g \circ f)(x)$.
Να βρείτε τον μοναδικό αριθμό ξ ο οποίος ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την συνάρτηση h στο διάστημα $[2, 8]$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 #36851

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -5x^2 - 3x + 1, & αν\ x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 1, & αν\ x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. (Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0. (Μονάδες 7)

γ) Να δικαιολογήσετε γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα [-1,1] και να βρείτε ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$. (Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 2 #24283

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & αν\ x \in [-1, 2] \\ x - 1, & αν\ x \in (2, 5] \end{cases}$$

1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 10)

2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$. (Μονάδες 09)

3) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1, 5]$. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 2 #31643

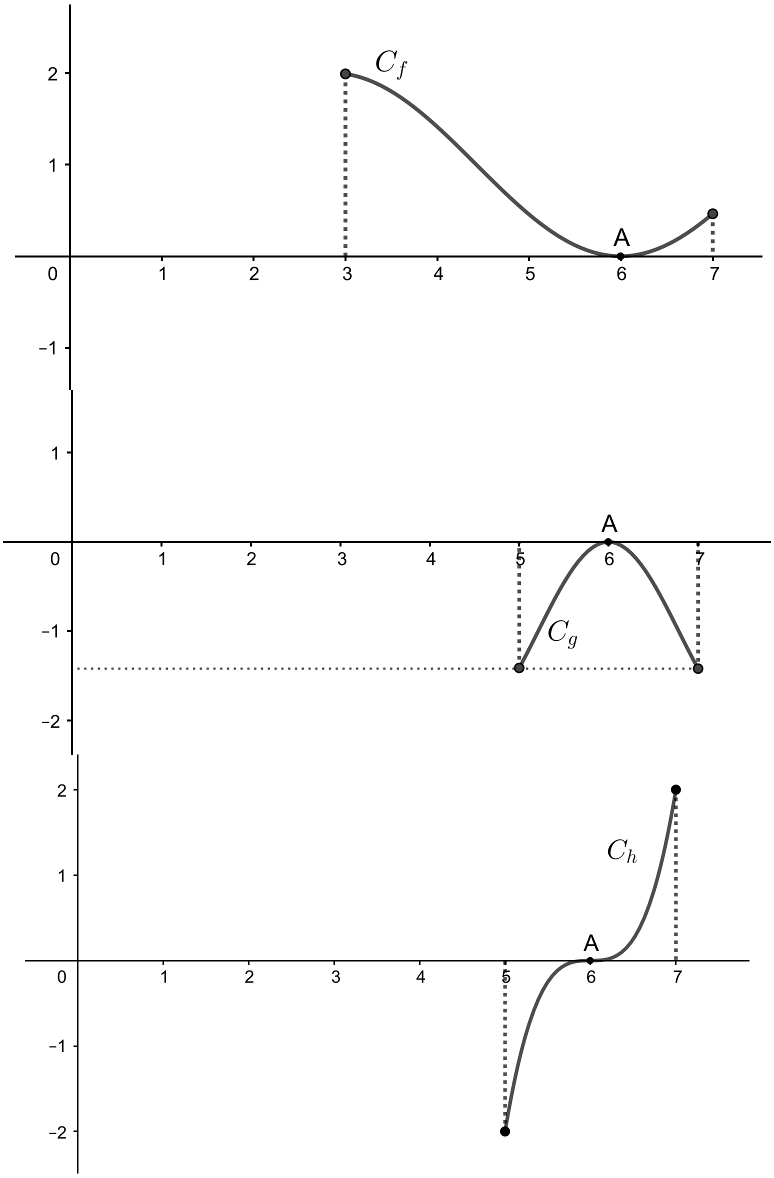
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x$, $x \in [1,2]$.

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 #36842

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 3 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f, g και h, οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f, g και h. (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους. (Μονάδες 10)

ii. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4 #29150

Η συνάρτηση $x(t)=(t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού A, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

4) i. Να βρείτε πότε το κινητό A είχε ταχύτητα μηδέν. (Μονάδες 05)
   ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό A κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά. (Μονάδες 04)
5) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διήνυσε το κινητό A. (Μονάδες 10)
6) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού A, από τη χρονική στιγμή 1 sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του A ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το A στο διάστημα αυτό. (Μονάδες 06)